

L'analyse d'un algorithme de tri appelé le *tri rapide* amène à considérer la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par récurrence forte par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + u_{n-1-k})$$

On se propose de calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n .

1. Compléter le tableau.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n							

On donnera les valeurs sous forme de fractions simplifiées.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = nu_n$.

- (a) Soit $n \geq 2$. Évaluer $v_n - v_{n-1}$ pour en déduire que

$$nu_n = 2(n-1) + (n+1)u_{n-1}$$

- (b) L'égalité obtenue à la question précédente est-elle valable pour $n = 1$? Pour $n = 0$?

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \frac{u_n}{n+1}$$

- (a) Que vaut w_0 ?

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + w_{n-1}$$

- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k(k+1)}$$

- (d) Cette égalité est-elle encore vraie pour $n = 0$?

- (e) Prouver qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{k-1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

On calculera explicitement a et b .

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

H_n est appelé le *nième nombre harmonique*. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression très simple de w_n en fonction de H_n et en déduire u_n en fonction de H_n .

6. On admet que

$$\frac{H_n}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Quelle est la limite de $u_n/(n \ln n)$ lorsque n tend vers l'infini?