Dans tout le problème, on note φ et $\overline{\varphi}$ les racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, φ désignant celle des deux racines qui est positive. On a en particulier les relations $\varphi + \overline{\varphi} = 1$ et $\varphi\overline{\varphi} = -1$. On note

$$\mathbb{A} = \{x + \varphi y, x, y \in \mathbb{Z}\}$$

-I-

1. Montrer que $(\mathbb{A}, +, \times)$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2. On admet que $\varphi \notin \mathbb{Q}$. Montrer que tout élément z de $\mathbb{A}$ s'écrit de façon unique $z = x + \varphi y$, où $x, y \in \mathbb{Z}$.
3. Pour tout $z = x + \varphi y \in \mathbb{A}$ (où $x, y \in \mathbb{Z}$), on pose $\overline{z} = x + \overline{\varphi} y$. Démontrer les propriétés suivantes :
   (a) $\forall z, z' \in \mathbb{A}, \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
   (b) $\forall z, z' \in \mathbb{A}, \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
   (c) $\forall z \in \mathbb{A}, \overline{\overline{z}} = z$
   (d) $\forall z \in \mathbb{A}, \overline{z} = z \iff z \in \mathbb{Z}$
4. Que peut-on dire de l'application de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{A}$ qui à z associe $\overline{z}$?
5. Pour tout $z \in \mathbb{A}$, on note $\mathcal{N}(z) = z\overline{z}$. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $\forall z \in \mathbb{A}$, $\mathcal{N}(z) \in \mathbb{Z}$.
   (b) $\forall z \in \mathbb{A}$, $\mathcal{N}(z) = 0 \iff z = 0$.
   (c) $\forall z, z' \in \mathbb{A}$, $\mathcal{N}(zz') = \mathcal{N}(z)\mathcal{N}(z')$.
   (d) $\forall z \in \mathbb{A}$, z est inversible (pour la multiplication) dans l'anneau $\mathbb{A}$ si et seulement si $\mathcal{N}(z) = 1$ ou $\mathcal{N}(z) = -1$. Lorsque z est inversible, on calculera l'inverse de z en fonction de $\overline{z}$.

-II-

On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{A}$.

Le plan euclidien est rapporté au repère canonique $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $\mathcal{H}$ (resp $\mathcal{H}'$) la courbe du plan d'équation $x^2 + xy - y^2 = 1$ (resp $= -1$) dans le repère $\mathcal{R}$. On décide de modéliser un élément $z = x + \varphi y$ de l'anneau $\mathbb{A}$ par le point (x, y) dans le plan. L'étude précédente montre que les éléments inversibles de $\mathbb{A}$ correspondent exactement aux points à coordonnées entières de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

1. Prouver que $(\mathcal{U}, \times)$ est un groupe abélien.
2. On note
$$\vec{u} = \frac{\vec{\imath} + \varphi\vec{\jmath}}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{\varphi\vec{\imath} - \vec{\jmath}}{\sqrt{1 + \varphi^2}}$$
   (a) Vérifier que le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé.
   (b) Soit m un point du plan. Soient x, y les coordonnées de m dans le repère $\mathcal{R}$ et X, Y les coordonnées de m dans le repère $\mathcal{R}'$.
      i. En écrivant que $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = X\vec{u} + Y\vec{v}$, calculer x et y en fonction de X et Y.
      ii. En déduire que $m \in \mathcal{H}$ si et seulement si $XY = c$ où c est un réel à déterminer.
      iii. Faire de même pour $\mathcal{H}'$.
   (c) Placer sur un même dessin : le repère $\mathcal{R}$, le repère $\mathcal{R}'$, les courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$. Placer également sur ce dessin les points correspondant à $\pm\varphi$, $\pm\overline{\varphi}$, ± 1 et $\pm\varphi^2 = \pm(1 + \varphi)$, qui sont clairement des éléments de $\mathcal{U}$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi^n \in \mathcal{U}$. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le point correspondant à φ^n est sur $\mathcal{H}$, et celles pour lesquelles ce point se trouve sur $\mathcal{H}'$.
4. On note $\mathcal{U}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{U}$ formé des inversibles $z = x + \varphi y$ tels que $x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathcal{H}$. On se donne un tel élément z.

(a) Vérifier que $y = 0 \iff z = 1$

(b) Montrer que si $y \neq 0$, alors $x \leq y$. On pourra écrire $x^2 + xy - y^2 = (x-y)(x+y) + xy$.

(c) Montrer que $y < 2x$. On pourra remarquer que $y^2 - x^2 - xy = (y - \varphi x)(y - \overline{\varphi} x)$, en déduire que $y < \varphi x$, puis utiliser l'inégalité $\varphi < 2$.

(d) Soit

$$z' = x' + \varphi y' = \frac{x + \varphi y}{1 + \varphi}$$

où $x', y' \in \mathbb{Z}$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y. Vérifier que si $z \neq 1$, alors $z' \in \mathcal{U}'$ avec, de plus, $y' < y$.

5. Soit $z \in \mathcal{U}'$. On construit une suite $(z_n)_{n \geq 0}$ en posant $z_0 = z$, et, pour tout $n \geq 0$, si $z_n \neq 1$, alors

$$z_{n+1} = \frac{z_n}{1 + \varphi}$$

Sinon, la suite est « finie » et s'arrête au rang n.

(a) Prouver que la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ est finie. On pourra, dans le cas contraire, exhiber une suite infinie strictement décroissante d'entiers naturels, et prouver qu'une telle suite ne peut exister.

(b) En déduire l'existence d'un entier naturel n_0 tel que $z = (1 + \varphi)^{n_0}$.

6. Déterminer l'ensemble $\mathcal{U}$.