On désigne par $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note $B_n(f)$ la fonction définie, pour tout $x \in [0,1]$, par

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

On remarquera que $B_n(f) \in E$ et que $B_n(f)$ est une fonction polynôme. Les (fonctions) polynômes $B_n(f)$ s'appellent les *polynômes de Bernstein*.

On note enfin φ_0, φ_1 et φ_2 les fonctions éléments de E définies pour tout $x \in [0,1]$ par

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x \text{ et } \varphi_2(x) = x^2$$

On veillera tout au long du problème à bien distinguer entre fonction et image d'un réel par une fonction. Par exemple on distinguera soigneusement la *fonction* $B_n(f)$ et le *réel* $B_n(f)(x)$, image du réel x par la fonction polynôme $B_n(f)$.

-I-

1. Soient $f \in E$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. À quel ensemble appartient $B_n(f)(x)$? $B_n(f)$? B_n ? B ?
2. Montrer que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E$, on a
   (a) $B_n(\alpha f + \beta g) = \alpha B_n(f) + \beta B_n(g)$ (linéarité)
   (b) $f \geq 0 \Rightarrow B_n(f) \geq 0$ (positivité)
   (c) $f \leq g \Rightarrow B_n(f) \leq B_n(g)$ (croissance)
   (d) $|B_n(f)| \leq B_n(|f|)$ (inégalité triangulaire)
3. Montrer que si $f \in E$ et si g est définie par $g(x) = xf(x)$, alors pour tout $x \in [0,1]$
$$\frac{x(1-x)}{n} \left(B_n(f)\right)'(x) = B_n(g)(x) - xB_n(f)(x)$$
4. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(\varphi_0) = \varphi_0$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(\varphi_1) = \varphi_1$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$
$$B_n(\varphi_2)(x) = \varphi_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}$$

-II-

Soit $f \in E$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé.

1. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, y \in [0,1]$,
$$|x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
2. Montrer que l'ensemble $\{|f(t)|, t \in [0,1]\}$ possède un plus grand élément. Dans la suite, on note
$$M = \max\{|f(t)|, t \in [0,1]\} \text{ et } K = \frac{2M}{\alpha^2}$$
3. Montrer que pour tous $x, y \in [0,1]$,
$$|f(x) - f(y)| \leq K(x-y)^2 + \varepsilon$$

4. On se donne un réel $y \in [0,1]$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que
$$|f - f(y)\varphi_0| \leq K(\varphi_2 - 2y\varphi_1 + y^2\varphi_0) + \varepsilon\varphi_0$$
   (b) En déduire que
$$|B_n(f) - f(y)B_n(\varphi_0)| \leq K(B_n(\varphi_2) - 2yB_n(\varphi_1) + y^2 B_n(\varphi_0)) + \varepsilon B_n(\varphi_0)$$
   (c) En déduire que pour tout $y \in [0,1]$,
$$|B_n(f)(y) - f(y)| \leq \frac{K}{4n} + \varepsilon$$
5. Montrer que pour tout entier n suffisamment grand,
$$\frac{K}{4n} \leq \varepsilon$$
6. Démontrer le théorème de Stone-Weierstrass :

   Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ à valeurs réelles, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\forall x \in [0,1], |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.

-III-

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

On s'intéresse à un cas particulier du théorème énoncé à la dernière question de la partie précédente. On considère ici la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0,1]$ par
$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$
1. Vérifier que pour tout $x \in [0,1]$,
$$B_n(f)(x) = n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n \int_0^1 u^{n-1}(1 - x(1-u))^n \, du$$
2. (a) Démontrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que pour tous $t, t' \in [0,1]$,
$$|t^n - t'^n| \leq n|t - t'|$$
   (b) En déduire que pour tous $x, x' \in [0,1]$, pour tout $u \in [0,1]$,
$$|(1 - x(1-u))^n - (1 - x'(1-u))^n| \leq n(1-u)|x - x'|$$
   puis que la fonction $B_n(f)$ est 1-lipschitzienne sur $[0,1]$.
   (c) En déduire un majorant de
$$\max\{|(B_n(f))'(x)|, x \in [0,1]\}$$
3. (a) En remarquant que $xf(x) = 1 - f(x)$, démontrer que pour tout $x \in [0,1]$,
$$\frac{x(1-x)}{n}(B_n(f))'(x) = 1 - (1+x)B_n(f)(x)$$
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$,
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{4n}$$