Dans tout le problème, A désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , on pose

$$f_A(x) = \inf\{|x - a|, a \in A\}$$

Partie I

1. Représenter le graphe de la restriction de f_A à I dans le cas où A et I sont les ensembles suivants :

- (a) $A = \mathbb{Z}$, et $I = [-3, 3]$.
- (b) $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ et $I = [-2, 6]$.
- (c) $A = \{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ et $I = [\frac{1}{16}, 2]$.

2. (a) Soient $x, x' \in \mathbb{R}$.

i. Vérifier que pour tout $a \in A$,

$$|x - a| \leq |x - x'| + |x' - a|$$

ii. En déduire que pour tout $a \in A$,

$$f_A(x) \leq |x - x'| + |x' - a|$$

iii. En déduire que

$$f_A(x) \leq |x - x'| + f_A(x')$$

iv. En déduire que

$$|f_A(x) - f_A(x')| \leq |x - x'|$$

(b) Montrer que f_A est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $f_A(x) = 0$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $a_n \in A$ tel que

$$|x - a_n| \leq \frac{1}{n}$$

(b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ ainsi définie converge vers x .

4. Inversement, soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite de points de A qui converge vers x . Montrer que $f_A(x) = 0$.

Partie II

1. Soit $x \in A$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset A$. Montrer que f_A est dérivable en x , et calculer $f'_A(x)$.

2. On suppose dans cette question que A est majorée. On note M_A la borne supérieure de A .

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_A(x) \neq 0$, et tel que pour tout $a \in A$, $a < x$. Calculer $f_A(x)$ en fonction de x et de M_A .

(b) i. Montrer que f_A est dérivable à droite en M_A , et calculer $(f_A)'_d(M_A)$.

ii. Montrer que f_A admet un minimum local en M_A . L'application f_A est-elle dérivable en M_A ?

3. Que deviennent les résultats de la question précédente lorsque A est minorée, de borne inférieure m_A ?

4. On suppose dans cette question que

$$A = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$g_A(x) = \frac{f_A(x)}{x}$$

- (a) Calculer, pour tout entier naturel n , $g_A(\frac{1}{2^n})$ et $g_A(\frac{3}{2^{n+1}})$.
- (b) Que peut-on en conclure sur la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f_A ?
5. Dans cette question, A est à nouveau une partie quelconque non vide de $\mathbb{R}$. On se donne $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_A(x) \neq 0$ et tel que x ne soit ni majorant, ni minorant de A .
- (a) Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$A \cap]-\infty, x - \delta] \neq \emptyset$$

$$A \cap [x + \delta, +\infty[\neq \emptyset$$

$$A \cap [x - \delta, x + \delta] = \emptyset$$

On note $B = A \cap]-\infty, x - \delta]$ et $C = A \cap [x + \delta, +\infty[$.

- (b) Montrer que $f_A(x) = \min(f_B(x), f_C(x))$.

On note M_B la borne supérieure de B , et m_C la borne inférieure de C .

- (c) Montrer que si $x < \frac{1}{2}(M_B + m_C)$, alors f_A est dérivable en x . Calculer $f'_A(x)$.
- (d) Énoncer et démontrer un résultat analogue lorsque $x > \frac{1}{2}(M_B + m_C)$.
- (e) Montrer que si $x = \frac{1}{2}(M_B + m_C)$, alors f_A est dérivable à gauche et à droite en x . Calculer les dérivées en question. L'application f_A est-elle dérivable en x ?