Pour toute fonction $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on note

$$\|f\| = \max\{|f(x)|, x \in [-1,1]\}$$

On définit la suite de polynômes à coefficients réels $(T_n)_{n\geq 0}$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Les polynômes T_n sont les *polynômes de Tchebychev (de première espèce).*

Partie I

1. (a) Calculer $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$.
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de T_n.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$
   Que vient-on de prouver ?
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$T_n(\cos x) = \cos nx$$
   (b) Inversement, soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\cos x) = \cos nx$. Montrer que $P = T_n$.
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.
4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $\|T_n\|$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
   $$T_n\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = 0$$
   (b) En déduire *toutes* les racines de T_n.

   Le polynôme T_n est donc scindé sur $\mathbb{R}$, toutes ses racines sont simples et elles appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$.

Partie II

Dans cette partie, n désigne un entier naturel. On note $t_0, \ldots, t_n$ les $n+1$ racines du polynôme T_{n+1}. On pose

$$Q_n = \frac{1}{2^n}T_{n+1} = \prod_{j=0}^{n}(X - t_j)$$

On se donne une fonction $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On note P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $t_0, \ldots, t_n$. On rappelle que $\deg P_n \leq n$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $P_n(t_j) = f(t_j)$.

1. Que vaut $\|Q_n\|$?
2. Soit $t \in [-1,1]$ un réel qui n'est pas l'un des t_j. Soit $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [-1,1]$, par
$$g(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{f(t) - P_n(t)}{Q_n(t)} Q_n(x)$$
   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1,1]$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, $g^{(k)}$ s'annule au moins $n+2-k$ fois sur $[-1,1]$.
3. Montrer que pour **tout** $t \in [-1,1]$, il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que
$$f(t) - P_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} Q_n(t)$$
4. En déduire que
$$\|f - P_n\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{2^n (n+1)!}$$

Partie III

On se donne un réel $a > 1/2$. On considère la fonction $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [-1,1]$ par
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

1. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$,
$$f(x) = \frac{1}{2ia} \left(\frac{1}{x - ia} - \frac{1}{x + ia} \right)$$
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$, une expression de $f^{(n)}(x)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|f^{(n)}\| \leq \frac{n!}{a^{n+2}}$$
4. Quelle est la limite de $\|f - P_n\|$ lorsque n tend vers l'infini ?