Un nombre complexe z est *algébrique* lorsqu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(z) = 0$. Dans le cas contraire, z est *transcendant*.

Partie I

1. (a) Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.
   (b) Soit x un nombre rationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est algébrique.
   (c) Soit x un nombre rationnel. Montrer que $e^{2i\pi x}$ est algébrique.
2. Dans cette question, z désigne un nombre complexe algébrique. On note
$$\mathcal{Z}(z) = \{P \in \mathbb{Q}[X], P(z) = 0\}$$
   (a) Soit $A = \{\deg P, P \in \mathcal{Z}(z), P \neq 0\}$. Montrer que A possède un plus petit élément d_0.
   (b) Soit P_0 un polynôme non nul et de degré d_0 appartenant à $\mathcal{Z}(z)$. Prouver que
$$\mathcal{Z}(z) = \{QP_0, Q \in \mathbb{Q}[X]\}$$
   (c) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire Π_z tel que $\mathcal{Z}(z)$ soit l'ensemble des multiples du polynôme Π_z.
   (d) Montrer que Π_z est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.

Le polynôme Π_z est le *polynôme minimal* du nombre algébrique z.

3. Déterminer les polynômes minimaux de i, de $\sqrt{2}$, et de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Partie II

Dans cette partie, z est un nombre complexe algébrique fixé. On note Π son polynôme minimal. On pose
$$\mathbb{Q}[z] = \{P(z), P \in \mathbb{Q}[X]\} \subset \mathbb{C}$$

1. Montrer que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[z]$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[z] = \mathbb{Q} \iff z \in \mathbb{Q}$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{Q}[z]$. Montrer que $x - y$ et xy sont encore dans $\mathbb{Q}[z]$.
4. Soit x un élément non nul de $\mathbb{Q}[z]$.
   (a) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $Q(z) = x$ et, de plus, $d^oQ < d^o\Pi$.
   (b) Prouver que Q et Π sont premiers entre eux. En déduire que $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[z]$.
5. Quelle est la structure algébrique de l'ensemble $\mathbb{Q}[z]$?

Partie III

Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ un polynôme non nul, de degré $m \in \mathbb{N}$. On pose
$$Q = \sum_{k=0}^{m} P^{(k)}$$

1. Pour tout réel α, on pose
$$R(\alpha) = e^{\alpha} \int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} P(\alpha x)\, dx$$
   Montrer que $R(\alpha) = e^{\alpha} Q(0) - Q(\alpha)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un réel positif $M(n)$ vérifiant
$$\forall x \in [0, n], |P(x)| \leq M(n)$$
3. En déduire que pour tout entier j, $0 \leq j \leq n$, $|R(j)| \leq e^n M(n)$.

Partie IV

On se propose dans cette partie de démontrer par l'absurde que le réel e est transcendant. On fait ainsi l'hypothèse que e est algébrique.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $A \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $n \geq 1$ de la forme

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

vérifiant $A(e) = 0$, dont tous les coefficients a_i appartiennent à $\mathbb{Z}$, avec de plus $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$.

On fixe désormais un tel polynôme A. On pose également

$$P = \frac{X^{p-1}}{(p-1)!}(X-1)^p \cdots (X-n)^p$$

où p est un entier supérieur ou égal à 2.

2. On reprend les fonctions Q et R de la partie III associées au polynôme P ci-dessus. Calculer $\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j)$ en fonction des a_j et des réels $R(j)$.
3. (a) Montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et tout $r \in [\![0, p-1]\!]$, $P^{(r)}(j) = 0$.
   (b) Montrer que pour tout $r \in [\![0, p-2]\!]$, $P^{(r)}(0) = 0$.
   (c) Montrer que $P^{(p-1)}(0) = (-1)^{np}(n!)^p$.

On suppose à partir de maintenant que p est un *nombre premier*.

On admettra le résultat suivant : *Pour tout entier $r \geq p$, le polynôme $P^{(r)}$ est un polynôme à coefficients entiers, multiples de p.*

4. (a) Montrer que $\sum_{j=1}^{n} a_j Q(j)$ est un entier divisible par p.
   (b) Montrer que pour p assez grand, $a_0 P^{(p-1)}(0)$ n'est pas divisible par p. On rappelle qu'un nombre premier divise un produit d'entiers si et seulement si il divise l'un des facteurs de ce produit.
   (c) En déduire que pour p assez grand

$$\left| \sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) \right| \geq 1$$

5. (a) Montrer que pour tout entier $j \in [\![0, n]\!]$

$$|R(j)| \leq \frac{e^n}{n} \frac{(n^{n+1})^p}{(p-1)!}$$

   (b) En déduire que pour tout nombre premier p assez grand

$$\left| \sum_{j=0}^{n} a_j R(j) \right| < 1$$

6. Conclure.