

On se propose de démontrer que le réel π est irrationnel. Dans toute la suite, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $2n$. On pose

$$F = \sum_{k=0}^n (-1)^k P^{(2k)}$$

- (a) Soit G la fonction définie pour tout x réel par

$$G(x) = F'(x) \sin x - F(x) \cos x$$

Montrer que pour tout x réel

$$P(x) \sin x = G'(x)$$

- (b) En déduire la *formule d'Hermite* :

$$\int_0^\pi P(x) \sin x \, dx = F(0) + F(\pi)$$

On suppose qu'il existe a et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\pi = \frac{a}{b}$. On pose

$$P_n = \frac{1}{n!} X^n (a - bX)^n$$

et

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \, dx$$

2. (a) Déterminer le tableau de variations de P_n sur l'intervalle $[0, \pi]$. Tracer sa courbe représentative, toujours sur $[0, \pi]$.
- (b) Montrer que $I_n \leq \frac{1}{n!} \pi \left(\frac{a^2}{4b} \right)^n$.
- (c) Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, $P_n(x) \geq m$.
- (d) En déduire, à l'aide de la formule de Chasles, que $I_n \geq m\sqrt{2}$, et donc que $I_n > 0$.
3. Montrer que I_n converge lorsque n tend vers l'infini et calculer sa limite.
4. (a) Démontrer que pour tout entier $k < n$, $P_n^{(k)}(0) = 0$.
- (b) Calculer $P_n^{(k)}(0)$ pour tout entier k tel que $n \leq k \leq 2n$. Il est conseillé d'utiliser la formule de Taylor.
- (c) Démontrer que pour tout entier $k > 2n$, $P_n^{(k)}(0) = 0$.
- (d) Déduire de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.
5. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $P_n(\pi - x) = P_n(x)$.
- (b) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une relation simple entre $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\pi)$.
- (c) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.
6. Montrer que $F(0) \in \mathbb{Z}$, $F(\pi) \in \mathbb{Z}$, puis enfin $I_n \in \mathbb{N}^*$.
7. Conclure que π est irrationnel.