

Un nombre complexe z est *algébrique* lorsqu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(z) = 0$. Dans le cas contraire, z est *transcendant*.

Partie I

1. (a) Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.
- (b) Soit x un nombre rationnel positif. Montrer que \sqrt{x} est algébrique.
- (c) Soit x un nombre rationnel. Montrer que $e^{2i\pi x}$ est algébrique.
2. Dans cette question, z désigne un nombre complexe algébrique. On note

$$\mathcal{Z}(z) = \{P \in \mathbb{Q}[X], P(z) = 0\}$$

- (a) Soit $A = \{\deg P, P \in \mathcal{Z}(z), P \neq 0\}$. Montrer que A possède un plus petit élément d_0 .
- (b) Soit P_0 un polynôme non nul et de degré d_0 appartenant à $\mathcal{Z}(z)$. Prouver que

$$\mathcal{Z}(z) = \{QP_0, Q \in \mathbb{Q}[X]\}$$

- (c) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire Π_z tel que $\mathcal{Z}(z)$ soit l'ensemble des multiples du polynôme Π_z .
- (d) Montrer que Π_z est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.

Le polynôme Π_z est le *polynôme minimal* du nombre algébrique z .

3. Déterminer les polynômes minimaux de i , de $\sqrt{2}$, et de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Partie II

Dans cette partie, z est un nombre complexe algébrique fixé. On note Π son polynôme minimal. On pose

$$\mathbb{Q}[z] = \{P(z), P \in \mathbb{Q}[X]\} \subset \mathbb{C}$$

1. Montrer que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[z]$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[z] = \mathbb{Q} \iff z \in \mathbb{Q}$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{Q}[z]$. Montrer que $x - y$ et xy sont encore dans $\mathbb{Q}[z]$.
4. Soit x un élément non nul de $\mathbb{Q}[z]$.
 - (a) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $Q(z) = x$ et, de plus, $d^\circ Q < d^\circ \Pi$.
 - (b) Prouver que Q et Π sont premiers entre eux. En déduire que $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[z]$.
5. Quelle est la structure algébrique de l'ensemble $\mathbb{Q}[z]$?

Partie III

Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ un polynôme non nul, de degré $m \in \mathbb{N}$. On pose

$$Q = \sum_{k=0}^m P^{(k)}$$

1. Pour tout réel α , on pose

$$R(\alpha) = e^\alpha \int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} P(\alpha x) dx$$

Montrer que $R(\alpha) = e^\alpha Q(0) - Q(\alpha)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un réel positif $M(n)$ vérifiant

$$\forall x \in [0, n], |P(x)| \leq M(n)$$

3. En déduire que pour tout entier j , $0 \leq j \leq n$, $|R(j)| \leq e^n M(n)$.

Partie IV

On se propose dans cette partie de démontrer par l'absurde que le réel e est transcendant. On fait ainsi l'hypothèse que e est algébrique.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $A \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $n \geq 1$ de la forme

$$A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

vérifiant $A(e) = 0$, dont tous les coefficients a_i appartiennent à \mathbb{Z} , avec de plus $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$.

On fixe désormais un tel polynôme A . On pose également

$$P = \frac{X^{p-1}}{(p-1)!} (X-1)^p \cdots (X-n)^p$$

où p est un entier supérieur ou égal à 2.

2. On reprend les fonctions Q et R de la partie III associées au polynôme P ci-dessus. Calculer $\sum_{j=0}^n a_j Q(j)$ en fonction des a_j et des réels $R(j)$.
3. (a) Montrer que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $P^{(r)}(j) = 0$.
(b) Montrer que pour tout $r \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$, $P^{(r)}(0) = 0$.
(c) Montrer que $P^{(p-1)}(0) = (-1)^{np} (n!)^p$.

On suppose à partir de maintenant que p est un nombre premier.

On admettra le résultat suivant : Pour tout entier $r \geq p$, le polynôme $P^{(r)}$ est un polynôme à coefficients entiers, multiples de p .

4. (a) Montrer que $\sum_{j=1}^n a_j Q(j)$ est un entier divisible par p .
(b) Montrer que pour p assez grand, $a_0 P^{(p-1)}(0)$ n'est pas divisible par p . On rappelle qu'un nombre premier divise un produit d'entiers si et seulement si il divise l'un des facteurs de ce produit.
(c) En déduire que pour p assez grand

$$\left| \sum_{j=0}^n a_j Q(j) \right| \geq 1$$

5. (a) Montrer que pour tout entier $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$|R(j)| \leq \frac{e^n (n^{n+1})^p}{n (p-1)!}$$

- (b) En déduire que pour tout nombre premier p assez grand

$$\left| \sum_{j=0}^n a_j R(j) \right| < 1$$

6. Conclure.