**-I-**

1. (a) Par les théorèmes sur les opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Écrivons $g = \varphi\psi$ où $\varphi(x) = e^x - 1$ et $\psi(x) = \frac{1}{x}$. On vérifie aisément que

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(0)}(x) = e^x - 1$.
- Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(n)}(x) = e^x$.
- Pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\psi^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

Utilisons la formule de Leibniz. Pour tout $x \neq 0$ et tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(x)\psi^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^x \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n+1-k}} - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

où le dernier terme provient de la dérivée à l'ordre 0 de $\varphi$, qui est $e^x - 1$ et pas $e^x$. Arrangeons un peu.

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= n! e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \frac{1}{x^{n+1-k}} - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n! e^x}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

d'où l'expression demandée.

(b) Remarquons qu'un DL en 0 à l'ordre $n+1$ de $e^{-x}$ est

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + o(x^{n+1})$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k - e^{-x} = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^{n+1} + o(x^{n+1}) \sim_0 \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^{n+1}$$

On en déduit que

$$g^{(n)}(x) \sim_0 \frac{(-1)^n n! e^x}{x^{n+1}} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^{n+1} \sim_0 \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que $g^{(n)}(x)$ tend vers $\frac{1}{n+1}$ lorsque $x$ tend vers 0.

(c) La fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$ (facile). De plus $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, et toutes les dérivées de $g$ admettent une limite réelle en 0. Par un corollaire du théorème des accroissements finis, on en déduit que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$.

2. (a) La fonction $f$ est l'inverse de la fonction $g$. Or l'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne s'annule pas est encore de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

   (b) Maintenant nous savons que $f$ est trois fois dérivable en 0. Le théorème de Taylor-Young et l'unicité du DL nous permettent d'identifier les coefficients du DL à l'ordre 3 trouvé au I.1.b. On en déduit

$$b_0 = f(0) = 1, b_1 = f'(0) = -\frac{1}{2}, b_2 = f''(0) = \frac{1}{6}, b_3 = f'''(0) = 0$$

3. (a) Soit $n \geq 1$. Utilisons la formule de Leibniz.

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)}(0) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b_k}{n+1-k} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k\end{aligned}$$

Il reste à remarquer que la fonction $fg$ est constante, égale à 1, et donc, pour tout $n \geq 1$, $(fg)^{(n)}(0) = 0$.

   (b) On applique la formule précédente pour $n = 1, 2, 3, 4$.

- Pour $n = 1$, $b_0 + 2b_1 = 1 + 2b_1 = 0$. On retrouve $b_1 = -\frac{1}{2}$.
- Pour $n = 2$, $b_0 + 3b_1 + 3b_2 = 1 - \frac{3}{2} + 3b_2 = 0$. On retrouve $b_2 = \frac{1}{6}$.
- Pour $n = 3$, $b_0 + 4b_1 + 6b_2 + 4b_3 = 1 - 2 + 1 + 4b_3 = 0$. On retrouve $b_3 = 0$.
- Pour $n = 4$, $b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3 + 5b_4 = 1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 5b_4 = 0$. On obtient $b_4 = -\frac{1}{30}$.

On dispose donc d'une formule permettant de calculer de proche en proche les $b_n$. La fonction Python ci-dessous automatise les calculs. Elle suppose écrite une fonction `binom` renvoyant les coefficients binomiaux.

```
from fractions import Fraction

def bernoulli(N):
    s = [Fraction(1)]
    for n in range(1, N + 1):
        b = 0
        for k in range(n):
            b += binom(n + 1, k) * s[k]
        s.append(- b / (n + 1))
    return s

>>> for b in bernoulli(20): print(b, end=',')
1,-1/2,1/6,0,-1/30,0,1/42,0,-1/30,0,5/66,0,-691/2730,
0,7/6,0,-3617/510,0,43867/798,0,-174611/330,
```

Voici donc les premiers nombres de Bernoulli.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | $-\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{1}{42}$ | 0 | $-\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{5}{66}$ |

**-II-**

1. (a) Soit $x \neq 0$. On a
$$u(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\coth\frac{x}{2}$$
La fonction coth est impaire. Il en résulte que $u$ est paire.

   (b) Les dérivées d'ordre impair d'une fonction paire sont des fonctions impaires. Leur valeur en 0 est donc 0. Or, pour tout $n \geq 1$, $u^{(2n+1)} = f^{(2n+1)}$. On a donc pour tout $n \geq 1$, $b_{2n+1} = f^{(2n+1)}(0) = 0$.

   **Remarque** : $b_3 = b_5 = b_7 = \ldots = 0$, mais $b_1 = -\frac{1}{2}$ n'est pas nul.

2. Soit $x \neq 0$. On a
$$\coth x + \frac{1}{\text{sh } x} = \frac{\text{ch } x + 1}{\text{sh } x} = \frac{2\text{ch }^2\frac{x}{2}}{2\text{ch }\frac{x}{2}\text{sh }\frac{x}{2}} = \coth\frac{x}{2}$$
De même,
$$\coth x - \frac{1}{\text{sh } x} = \frac{\text{ch } x - 1}{\text{sh } x} = \frac{2\text{sh }^2\frac{x}{2}}{2\text{ch }\frac{x}{2}\text{sh }\frac{x}{2}} = \text{th }\frac{x}{2}$$

3. Remarquons qu'un DL de $f$ en 0 à l'ordre $2n+1$ est
$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \sum_{k=0}^{n}\frac{b_{2k}}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$$
et donc
$$u(x) = \frac{x}{2} + f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{b_{2k}}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$$
Pour tout $x$ non nul, on a donc
$$x\coth x = u(2x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{b_{2k}2^{2k}}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$$
De III.2, on obtient
$$\frac{x}{\text{sh } x} = x\coth\frac{x}{2} - x\coth x = 2u(x) - u(2x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{b_{2k}(2 - 2^{2k})}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

4. Toujours avec III.2, on a
$$\begin{aligned} x\text{ th }\frac{x}{2} &= x\coth x - \frac{x}{\text{sh } x} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{b_{2k}(2^{2k+1} - 2)}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2b_{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$
On divise par $x$ pour obtenir
$$\text{th }\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2b_{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k)!}x^{2k-1} + o(x^{2n})$$
D'où, en remplaçant $x$ par $2x$,
$$\text{th } x = \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}b_{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k)!}x^{2k-1} + o(x^{2n})$$

**Complément**

On peut de façon naturelle prolonger les fonctions trigonométriques à $\mathbb{C}$ en posant, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ et } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

puis, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\cos z$ ne s'annule pas, $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$. On peut de même prolonger les fonctions hyperboliques en posant

$$\text{sh } z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \text{ et ch } z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

puis, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que ch $z$ ne s'annule pas, th $z = \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z}$. On remarque alors que

$$\sin z = \frac{1}{i} \text{ sh}(iz) \text{ et } \cos z = \text{ ch}(iz)$$

Ainsi, $\tan z = \frac{1}{i}$ th$(iz)$. En *admettant* que l'on puisse prendre $x$ complexe dans le développement limité de th trouvé ci-dessus (c'est vrai, mais c'est loin d'être évident), on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ voisin de 0,

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k} b_{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}(ix)^{2k-1} + o(x^{2n}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}(-1)^{k-1} b_{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} x^{2k-1} + o(x^{2n})
\end{aligned}$$

en utilisant $i^{2k-1} = i^{2k}\frac{1}{i} = \frac{(-1)^k}{i}$. Nous avons donc le développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de la fonction tan. Pour ceux d'entre vous qui se seraient demandés pourquoi il n'y a pas le DL de la fonction tangente dans le cours sur les développements limités usuels, vous avez maintenant la réponse : ce DL est compliqué, il fait intervenir les nombres de Bernoulli $b_{2k}$.

5. La fonction $x \mapsto \ln(\text{ch } x)$ est dérivable au voisinage de de 0 (en fait sur $\mathbb{R}$) et sa dérivée est $x \mapsto$ th $x$. Par le théorème d'intégration des DLs, on obtient donc un DL à l'ordre $2n+1$ de cette fonction en intégrant formellement le DL à l'ordre $2n$ de sa dérivée. Inutile d'ajouter une constante car $\ln(\text{ch } 0) = 0$.

$$\ln(\text{ch } x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k} b_{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}\frac{x^{2k}}{2k} + o(x^{2n+1})$$

Soit $\varphi : x \mapsto \ln \frac{\text{sh } x}{x}$, prolongée par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\varphi(x) = \ln \frac{\text{sh } x}{x} = \ln(1 + o(x)) = o(x)$$

La fonction $\varphi$ admet donc un DL à l'ordre 1 en 0. Ainsi, elle est dérivable en 0. De plus, $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \neq 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{x}{\text{sh } x}\frac{x \text{ ch } x - \text{ sh } x}{x^2} = \text{ coth } x - \frac{1}{x}$$

d'où

$$x\varphi'(x) = u(2x) - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k} b_{2k}}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

puis

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k} b_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} + o(x^{2n})$$

La fonction $\varphi'$ admet ainsi un DL à l'ordre $2n$ en 0. Par le théorème d'intégration des DLs, on obtient donc un DL à l'ordre $2n+1$ de $\varphi$ en intégrant formellement le DL à l'ordre $2n$ de sa dérivée. Inutile d'ajouter une constante car $\varphi(0) = 0$.

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k} b_{2k}}{(2k)!} \frac{x^{2k}}{2k} + o(x^{2n+1})$$