Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. On note id_E l'application identité de E.

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un endomorphisme f de E est *cyclique d'ordre* n lorsqu'il existe un n-uplet $(u_0, \dots, u_{n-1})$ de vecteurs de E vérifiant :

- $(u_0, \dots, u_{n-1})$ est une famille génératrice de E.
- $f(u_0) = u_1$, $f(u_1) = u_2$, $\dots$, $f(u_{n-2}) = u_{n-1}$ et $f(u_{n-1}) = u_0$.
- $\forall p \in [\![1, n-1]\!], u_p \neq u_0$.

Une telle famille $(u_0, \dots, u_{n-1})$ est appelée un *cycle* pour f.

Dans tout le problème, hormis dans les questions 5, 6 et 12, on se donne $f \in \mathcal{L}(E)$ et on suppose que f est cyclique d'ordre n.

Partie I

1. Montrer que dans un cycle pour f deux vecteurs quelconques sont distincts.
2. Montrer que si $(u_0, \dots, u_{n-1})$ est un cycle pour f, la famille (u_0, u_1) est une base de E.
3. Montrer :
   - $f^n = \mathrm{id}_E$
   - Pour tout entier k strictement compris entre 0 et n, $f^k \neq \mathrm{id}_E$.
4. En déduire qu'il existe un unique entier $n \geq 2$ tel que f soit cyclique d'ordre n.
5. Exhiber un endomorphisme f de E tel que $f \neq \mathrm{id}_E$ et $f^2 = \mathrm{id}_E$ qui n'est pas cyclique.
   La condition trouvée à la question 3 n'est donc **pas** *une CNS pour que f soit cyclique.*
6. Quelle est la nature géométrique d'un endomorphisme cyclique d'ordre 2 ?
7. Démontrer qu'il existe deux réels a, b et une base de E dans laquelle la matrice de f est
$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$
8. Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\det M = ad - bc$. On admet que pour tout entier naturel n, $\det(M^n) = (\det M)^n$.
   Montrer que le réel a trouvé à la question précédente vaut -1 ou 1. On précisera les valeurs possibles de a selon la parité de n.
9. Démontrer que $f^2 = a\, \mathrm{id}_E + bf$.
10. En déduire que si, dans deux bases différentes, les matrices de f sont $A_{a,b}$ et $A_{\alpha,\beta}$, alors $a = \alpha$ et $b = \beta$.

    Les réels a et b ne dépendent donc que de l'endomorphisme cyclique f, et pas des bases dans lesquelles sa matrice est de la forme $A_{a,b}$.
11. Déterminer, en fonction de a et b, une condition *nécessaire et suffisante* pour que f soit

(a) cyclique d'ordre 2.

(b) cyclique d'ordre 3.

On remarquera les mots en italiques dans la question. Ne pas se contenter de faire la moitié du travail.

12. *Un exemple*

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Prouver que g est cyclique, déterminer les réels a et b associés à g, ainsi qu'un cycle $(u_0, \ldots, u_{n-1})$ associé à g et l'ordre de cyclicité n de g.

Partie II

On se donne dans cette partie un endomorphisme f de E cyclique d'ordre $n \geq 2$. On note encore a et b les réels définis à la question I.7. On pose

$$P = X^2 - bX - a$$

1. On suppose que le polynôme P a une racine double.

   (a) Montrer que $a = -1$ et que $b = -2$ ou 2.

   (b) On suppose dans cette question que $b = 2$. On pose

   $$U = A_{a,b} - I$$

   où I est la matrice identité d'ordre 2. Calculer U^2 et en déduire $A_{a,b}^n$. Conclure à une impossibilité.

   (c) Procéder de même dans le cas où $b = -2$.

   (d) Conclusion ?

2. On suppose que le polynôme P a deux racines réelles distinctes α et β.

   (a) Montrer que $(f - \alpha \, \mathrm{id}_E) \circ (f - \beta \, \mathrm{id}_E) = 0$.

   (b) Montrer que $f \neq \beta \, \mathrm{id}_E$ et en déduire que $f - \alpha \, \mathrm{id}_E$ n'est pas injectif.

   (c) En déduire qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que $f(u) = \alpha u$.

   (d) Montrer que $\alpha = -1$ ou 1.

   De même (inutile de le démontrer), il existe un vecteur v non nul de E tel que $f(v) = \beta v$, et $\beta = -1$ ou 1.

   (e) Montrer que $\{\alpha, \beta\} = \{-1, 1\}$.

   (f) Prouver que (u, v) est une base de E.

   (g) En déduire que $n = 2$.

3. Que peut-on dire du polynôme P lorsque $n \geq 3$?