

Dans tout le problème, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application définie par $f(0) = 1$ et pour tout $t \neq 0$,

$$f(t) = \frac{\arctan t}{t}$$

Partie I

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 (b) Montrer que f est paire.
2. (a) Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 et déterminer celui-ci.
 (b) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
 (c) Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et déterminer $f''(0)$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.
4. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$$

6. En déduire le tableau de variations (à justifier, cela va de soi) de f .
7. Tracer la courbe de f .

Partie II

Jusqu'à la fin du problème, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application définie par $\varphi(0) = 1$ et pour tout $x \neq 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

1. (a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
 (b) Montrer que φ est paire.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$$

On pourra commencer par prouver l'inégalité pour $x > 0$.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \varphi(x))$$

4. Montrer que φ est dérivable en 0, et $\varphi'(0) = 0$.
5. Donner le tableau de variation (à justifier, cela va de soi) de φ .
6. (a) Montrer que

$$\frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

- (b) En déduire que $\varphi(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
7. Tracer la courbe représentative de φ sur le même graphe que celle de f .

Partie III

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$$

2. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

- (b) En déduire que, pour tout $x > 0$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

- (c) Prouver que cette inégalité reste vérifiée pour tout x réel.

3. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$. Prouver que $\alpha \in]0, 1]$.
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

5. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et préciser sa limite.

Partie IV

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2 y' + xy = \arctan x$$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que φ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) .