On appelle $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices à coefficients complexes du type $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ où $a,b,c \in \mathbb{C}$.

1. (a) Vérifier que $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Calculer la dimension de $\mathcal{M}$ et en donner une base.

   (b) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ (où j est une racine cubique non réelle de 1). Soient $a,b,c \in \mathbb{C}$ et M$= M(a,b,c)$. Calculer le déterminant de J. Vérifier ensuite que les colonnes du produit MJ sont des multiples des colonnes de J, et en déduire une expression factorisée du déterminant de la matrice M.

   (c) Montrer que si $M \in \mathcal{M}$ est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{M}$. On calculera explicitement l'inverse de M.

2. Soit $s_0 : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ définie par $s_0(M(a,b,c)) = a+b+c$.

   (a) Démontrer que s_0 est un morphisme d'anneaux et un morphisme d'espaces vectoriels.

   (b) On note $\mathcal{F}_0 = \ker s_0$. $\mathcal{F}_0$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$. Quelle est sa dimension ?

   (c) Montrer la propriété suivante : $\forall M \in \mathcal{M}, \forall A \in \mathcal{F}_0, AM \in \mathcal{F}_0$.

   On dira dans la suite qu'un sous-espace vectoriel $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}$ est absorbant lorsque $\forall M \in \mathcal{M}, \forall A \in \mathcal{G}, AM \in \mathcal{G}$. Ainsi, par exemple, $\mathcal{F}_0$ est un sous-espace vectoriel absorbant de $\mathcal{M}$.

3. Récréation. Quels sont les sous-espaces vectoriels absorbants de $\mathcal{M}$ de dimension 3 ? de dimension 0 ?

4. Démontrer (succintement) des résultats analogues à ceux de la question 2 pour les applications s_1 et s_2, de $\mathcal{M}$ vers $\mathbb{C}$, définies par $s_1(M(a,b,c)) = a+jb+j^2c$ et $s_2(M(a,b,c)) = a+j^2b+jc$. On notera par la suite $\mathcal{F}_1 = \ker s_1$ et $\mathcal{F}_2 = \ker s_2$.

5. (a) Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace vectoriel absorbant de $\mathcal{M}$, possédant un élément inversible pour la multiplication. Démontrer que $\mathcal{F} = \mathcal{M}$ (on pourra montrer dans un premier temps que la matrice identité appartient à $\mathcal{F}$, puis en déduire le résultat).

   (b) En déduire que tout sous-espace vectoriel absorbant de $\mathcal{M}$ différent de $\mathcal{M}$ est inclus dans $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

6. On se donne dans cette question un sous-espace vectoriel absorbant $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}$, différent de $\mathcal{M}$. On se propose de montrer que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ ou $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ ou $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_2$.

   (a) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\det(A+\lambda B) = \prod_{k=0}^{2}(s_k(A)+\lambda s_k(B))$.

   (b) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Que vaut $\det(A+\lambda B)$? En déduire l'existence d'un entier k, $0 \le k \le 2$ tel que $s_k(A) = s_k(B) = 0$.

   (c) On suppose que $\mathcal{F} \not\subset \mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F} \not\subset \mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F} \not\subset \mathcal{F}_2$. Il existe donc des matrices A_0, A_1 et A_2 de $\mathcal{F}$ telles que $s_k(A_k) \neq 0$ pour $k = 0,1,2$. Démontrer que

   $$s_2(A_0) = s_2(A_1) = 0; s_1(A_0) = s_1(A_2) = 0; s_0(A_1) = s_0(A_2) = 0$$

   (d) En calculant de deux façons différentes le déterminant de la matrice $A_0 + A_1 + A_2$, montrer que l'on aboutit à une contradiction.

   (e) Conclure.

7. Quels sont les sous-espaces vectoriels absorbants de $\mathcal{M}$ de dimension 2 ?

8. Citer trois sous-espaces vectoriels absorbants « évidents » de $\mathcal{M}$ de dimension 1. Démontrer que ce sont les seuls.