$\mathbb{R}[X]$ désigne l'algèbre des polynômes à coefficients réels à une indéterminée X. On confondra dans tout le problème polynômes et fonctions polynômes. Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Partie I

1. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.
   Montrer qu'il existe une unique fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ vérifiant
   $$F' = f \text{ et } \int_0^1 F(t)\,dt = 0$$
   Indication : soit $G : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$. Si F convient, il existe un réel c tel que $F = G + c$. Que vaut c ? Une fois c trouvé, **qu'a-t-on montré** *? L'existence ou l'unicité ?*
2. Montrer qu'il existe une unique suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $B_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$B'_{n+1} = B_n \text{ et } \int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = 0$$
   On prendra bien soin de montrer **séparément** *l'existence et l'unicité de la suite.*
3. Déterminer les polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4.
4. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le degré de B_n et son coefficient dominant.
5. Monter que pour tout entier $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

   Remarque : cette égalité est fausse pour $n = 1$.
6. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $C_n \in \mathbb{R}[X]$ par
   $$C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$$
   (a) Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait aux trois conditions de la question 2 définissant la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = C_n$.

   (c) Les graphes des polynômes B_n possèdent des symétries. Lesquelles ? *On distinguera les cas n pair et n impair et on joindra un dessin explicatif à la démonstration.*

   (d) Soit $n \geq 3$ un entier impair. Calculer $B_n(0)$, $B_n\left(\frac{1}{2}\right)$ et $B_n(1)$.
7. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, le polynôme B_{2m+1} ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.
   Indication : récurrence, absurde, Rolle.
8. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$, le polynôme $B_{2m}(X) - B_{2m}(0)$ est de signe constant sur $[0,1]$.

Partie II

1. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,1[$. Montrer que
   $$1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$
2. Pour tout entier $n \geq 2$, soit $\varphi_n :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $t \in]0,1[$ par
   $$\varphi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}$$

(a) Montrer que φ_n admet une limite en 0 et calculer cette limite.

(b) Montrer que φ_n admet une limite en 1 et calculer cette limite.

La fonction φ_n est donc prolongeable par continuité à $[0,1]$. On continue à appeler φ_n le prolongement en question.

(c) Montrer que φ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t)\cos(2\pi kt)\,dt$$

(a) Déterminer, pour tout $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$. On rappelle que pour $n \geq 1$, $B_n' = B_{n-1}$, et que pour $n \geq 3$, on a $B_{n-1}(0) = B_{n-1}(1)$.

(b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de n et de k. On étudiera les deux cas $n = 2m$, $n = 2m+1$, où $m \in \mathbb{N}$.

5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\,dt$$

en fonction de m, N et $B_{2m}(0)$.
On utilisera le résultat de la question II.1 afin de remplacer $\sin((2N+1)\pi t)$ *par une somme de cosinus.*

(b) En déduire la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2m}}$$

On exprimera cette limite en fonction de m et $B_{2m}(0)$.

(c) Donner les valeurs explicites de cette limite lorsque $m = 1$ et $m = 2$.