Pour tous ensembles E et F , on note $\mathcal{S}(E, F)$ l'ensemble des surjections de E sur F .

Partie I

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p . Montrer que le cardinal de $\mathcal{S}(E, F)$ ne dépend que de n et p , et pas des ensembles E et F .

Dorénavant, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on note S_p^n le cardinal de $\mathcal{S}(E, F)$, où E et F sont des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p .

2. (a) Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p > n$. Calculer S_p^n .
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer S_0^n , S_1^n et S_n^n .
3. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p . En dénombrant judicieusement les éléments de $\mathcal{S}(E, F)$, démontrer que

$$S_p^n = p(S_{p-1}^{n-1} + S_p^{n-1})$$

Indication. Soit $a \in E$. Les surjections $f \in \mathcal{S}(E, F)$ sont de deux types : celles pour lesquelles $f(a)$ a un unique antécédent, et les autres.

4. Donner dans un tableau la valeur de S_p^n pour $n, p \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$.
 5. Combien le nombre S_{123}^{456} possède-t-il de chiffres en base 10 ?

Partie II

Étant donné un ensemble E , une *partition* de E est un ensemble P de parties de E vérifiant :

- $\forall A \in P, A \neq \emptyset$.
- $\forall A, B \in P, A \neq B \implies A \cap B = \emptyset$.
- $\bigcup_{A \in P} A = E$.

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ et tout ensemble E fini de cardinal n , on note $\Pi_p(E)$ l'ensemble des partitions de l'ensemble E en p sous-ensembles. On peut montrer que le cardinal de $\Pi_p(E)$ ne dépend que de n et p , et pas de l'ensemble E . On note $\left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\}$ le cardinal de $\Pi_p(E)$.

1. (a) Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p > n$. Calculer $\left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\}$.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}$, $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}$.
2. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p .
- (a) Soit $f \in \mathcal{S}(E, F)$. Soit

$$P_f = \{f^{-1}(\{y\}), y \in F\}$$

Montrer que $P_f \in \Pi_p(E)$

On considère l'application $\varphi : \mathcal{S}(E, F) \longrightarrow \Pi_p(E)$ définie par $\varphi(f) = P_f$.

(b) Montrer que φ est surjective.

(c) Plus précisément, étant donnée $P \in \Pi_p(E)$, quel est le cardinal de $\varphi^{-1}(\{P\})$?

(d) En déduire que

$$S_p^n = p! \left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\}$$

3. Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ p-1 \end{matrix} \right\} + p \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ p \end{matrix} \right\}$$

4. Donner dans un tableau la valeur de $\left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\}$ pour $n, p \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$.

5. Donner les 9 derniers chiffres de $\left\{ \begin{matrix} 939 \\ 393 \end{matrix} \right\}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout ensemble fini E de cardinal n , on note $\Pi(E)$ l'ensemble des partitions de E et B_n le cardinal de $\Pi(E)$ (ce cardinal ne dépend que de n , et pas de E).

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \sum_{p=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\}$$

(b) Calculer B_n pour $n \in \llbracket 0, 7 \rrbracket$.

(c) Tirer un entier n au hasard entre 500 et 1000. Combien le nombre B_n possède-t-il de chiffres en base 10 ?

7. *Question subsidiaire.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble fini de cardinal $n+1$. En dénombrant de façon judicieuse les partitions de E , montrer que

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

Indication : soit $a \in E$ fixé. Pour créer une partition P de E ,

- On se donne $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.
- On choisit une partie A de E de cardinal j qui contient a .
- On choisit une partition P' de $E \setminus A$.

On prend enfin $P = P' \cup \{A\}$.