Étant donnée une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels ou complexes, on note dans tout le problème $\sum_{n\geq 0} u_n$ la série de terme général u_n. Lorsque cette série converge, on note sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Si u_n n'est défini que pour $n \geq n_0$, on adapte évidemment les notations.

-I-

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$ lorsque n tend vers l'infini.

1. On suppose dans cette question que $0 \leq \ell < 1$. Soit $q = \frac{\ell+1}{2}$.
   (a) Montrer que $\ell < q < 1$.
   (b) Montrer l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}$ vérifiant
   $$\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$$
   On se donne un tel N dans la question suivante.
   (c) Montrer qu'il existe un réel $K \geq 0$ tel que $\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq Kq^n$.
   (d) Prouver que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
2. On suppose dans cette question que $1 < \ell < +\infty$. En adaptant la démarche de la question précédente, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.
3. On suppose dans cette question que $\ell = +\infty$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.
4. On suppose dans cette question que $\ell = 1$. Montrer par deux exemples que dans ce cas on ne peut rien conclure.

-II-

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes non nuls. Soit $z \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à la série

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

On suppose que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$ lorsque n tend vers l'infini.

1. On suppose dans cette question que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que si $|z| < \frac{1}{\ell}$ la série est absolument convergente.
   (b) Montrer que si $|z| > \frac{1}{\ell}$ la série diverge.

   Le réel $R = \frac{1}{\ell}$ est appelé le rayon de convergence de la série.

   (c) Le rayon de convergence est le rayon ... mais de quoi ?
2. On suppose dans cette question que $\ell = 0$. Montrer que la série converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.

   Dans ce cas on dit que le rayon de convergence de la série est $R = +\infty$.

3. On suppose dans cette question que $\ell = +\infty$. Que dire de la série ?

-III-

1. Soit $\varphi :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \ln(1+x)$.
   (a) Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x > -1$ la valeur $\varphi^{(n)}(x)$ de la dérivée d'ordre n de la fonction φ en x.
   (b) Soit $x \in]0,1[$. Montrer au moyen de l'inégalité de Taylor-Lagrange que la série
$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$
   est convergente, et que sa somme est
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$$

   Par une preuve analogue, on montre que ce résultat reste valable lorsque $x \in]-1, 0]$ (inutile de le faire).

   (c) Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in]-1,1[$ la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ est convergente, et calculer sa somme.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on considère la série
$$\sum_{n\geq 2} \frac{2z^n}{n^2-1}$$

2. Déterminer le rayon de convergence de cette série.
3. Montrer que si $|z| = 1$, la série est convergente.

Pour tout x **réel** *tel que la série converge, on pose*
$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x^n}{n^2-1}$$

4. Quel est l'ensemble de définition de f ?
5. Déterminer la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
6. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
7. La fonction f est-elle continue en 1 ? Dérivable en 1 ?
8. Montrer que f est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$, et calculer sa dérivée.
9. La fonction f est-elle continue en -1 ? Dérivable en -1 ?
10. (a) En revenant à la définition de f sous forme de série, montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $|f(x)| \leq x^2 f(1)$.
    (b) En déduire que f est dérivable en 0, et donner la valeur de $f'(0)$.
11. (a) En revenant à la définition de f sous forme de série, montrer que f est croissante sur $[0,1]$.
    (b) En utilisant l'expression de f trouvée au III.5, prouver que f est décroissante sur $[-1,0]$.
    (c) Donner le tableau de variations de f, puis tracer sa courbe représentative. On soignera particulièrement le comportement de f en -1 et 1.