Pour tout ensemble E, on note $\mathcal{I}(E)$ l'ensemble des *involutions* de E, c'est à dire des fonctions $f : E \longrightarrow E$ vérifiant $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

1. Si E est fini, de cardinal n, montrer que $\mathcal{I}(E)$ est fini, de cardinal inférieur ou égal à $n!$.
   On montre facilement que le cardinal de $\mathcal{I}(E)$ ne dépend que de n et pas de E. On note dans la suite I_n ce cardinal.
2. Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend $E = [\![1, n+1]\!]$. Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, on note
$$A_k = \{f \in \mathcal{I}(E), f(n+1) = k\}$$
   (a) Montrer que A_{n+1} est en bijection avec $\mathcal{I}(E \setminus \{n+1\})$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k est en bijection avec $\mathcal{I}(E \setminus \{n+1, k\})$.
   (c) En déduire que $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$.
   (d) Donner dans un tableau la valeur de I_n pour $n \in [\![0, 10]\!]$.
   (e) Combien l'entier I_{2660} possède-t-il de chiffres en base 10 ?

   Pour tout $x \in]-1, 1[$, on considère la série
$$\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$$
4. Montrer que cette série est absolument convergente.
   On pose, pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$$
   On admettra que $S \in \mathcal{C}^\infty(]-1, 1[)$ et que pour tout $x \in]-1, 1[$ et tout $k \in \mathbb{N}$,
$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{I_n}{(n-k)!} x^{n-k}$$
5. Montrer que S est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle
$$(E)\ y' = (x+1)y$$
6. Résoudre (E) et en déduire $S(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o_0(x^n)$$
$$e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o_0(x^n)$$
   (a) Quel théorème justifie l'existence de ces deux développements limités ?
   (b) Donner la valeur de a_k et b_k pour $k \in [\![0, n]\!]$.
   On effectue le produit de ces deux développements limités pour obtenir
$$e^{x+\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o_0(x^n)$$
   (c) Exprimer c_n en fonction des a_k et des b_k.
   (d) Montrer que
$$c_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$
   (e) En déduire que
$$I_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{n!}{k!(n-2k)!2^k}$$