Ce devoir comporte deux problèmes indépendants. Il sera tenu compte de la présentation, de l'orthographe et de la rédaction. Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$. Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E)\ 3z^3 - z^2 - z - 1 = 0$$

On remarquera que 1 est solution de (E).

1. (a) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$3z^3 - z^2 - z - 1 = (z-1)(3z^2 + az + b)$$

   On calculera explicitement a et b.

   (b) Achever de résoudre (E).

   On trouvera, en plus du nombre 1, deux autres solutions que l'on appellera jusqu'à la fin du problème α et β.

   On s'intéresse dans la suite du problème aux suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant la propriété

$$(P)\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+3} = \frac{1}{3}\left(z_{n+2} + z_{n+1} + z_n\right)$$

2. Déterminer les nombres complexes w non nuls tels que la suite géométrique $(w^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (P).
3. Soient $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *On admet jusqu'à la fin de ce problème qu'il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu & = & z_0 & (0) \\ \lambda + \mu\alpha + \nu\beta & = & z_1 & (1) \\ \lambda + \mu\alpha^2 + \nu\beta^2 & = & z_2 & (2) \end{cases}$$

   En combinant astucieusement les trois égalités ci-dessus, donner une expression très simple de λ en fonction de z_0, z_1 et z_2.
4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes vérifiant la propriété (P).

   (a) Montrer qu'il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \lambda + \mu\alpha^n + \nu\beta^n$$

   (b) Calculer $|\alpha|$ et $|\beta|$. On constatera que ces deux réels sont strictement inférieurs à 1.

   (c) Montrer que $|z_n - \lambda|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
5. Interpréter géométriquement le résultat de la question précédente. Des dessins seront particulièrement appréciés.

Problème 2

On se donne trois nombres complexes α, β et p, distincts deux à deux.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{p\}$, on a
$$\frac{(\alpha+\beta-p)z-\alpha\beta}{z-p} \neq \alpha+\beta-p$$

Dans tout le problème on note $f : \mathbb{C} \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\alpha+\beta-p\}$ l'application définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{p\}$ par
$$(\star) \quad f(z) = \frac{(\alpha+\beta-p)z-\alpha\beta}{z-p}$$

2. *Dans cette question, on considère un exemple.*
Soit $f_0 : \mathbb{C} \setminus \{i\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{2\}$ l'application définie pour tout $z \neq i$ par
$$f_0(z) = \frac{2z-1-i}{z-i}$$
Montrer, en exhibant trois nombres complexes α, β, p bien choisis, que f_0 vérifie $(\star)$.
On choisira α et β de sorte que $|\beta-p| < |\alpha-p|$.

On revient au cas général.

3. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.
4. Déterminer les points fixes de f, c'est à dire les nombres complexes $z \neq p$ tels que $f(z) = z$.
5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{p, \beta\}$.
   (a) Montrer que $f(z) \neq \beta$.
   (b) Montrer que
   $$f(z) - f(\alpha) = \frac{(z-\alpha)(\beta-p)}{z-p}$$
   et
   $$f(z) - f(\beta) = \frac{(z-\beta)(\alpha-p)}{z-p}$$
   La réponse étant donnée, on soignera particulièrement les détails du calcul sur la copie.
   (c) Montrer qu'il existe un nombre complexe K, indépendant de z, tel que
   $$\frac{f(z)-\alpha}{f(z)-\beta} = K\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$
   On calculera explicitement K en fonction de α, β et p.
   (d) Que vaut K pour l'application f_0 de la question 2 ?
6. Soit u_0 un nombre complexe différent de β et de p. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par la donnée de u_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. On fait de plus l'hypothèse que u_0 est choisi de telle sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq p$ et $u_n \neq \beta$. On pose enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$$
   (a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
   (d) On prend $f = f_0$ (voir question 2).
      i. Quelle est la limite de v_n lorsque n tend vers l'infini ?
      ii. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini ?