On note E l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

Partie I

1. Montrer que les fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \operatorname{ch} x$ appartiennent à l'ensemble E.
2. Soit $f \in E$. Montrer que pour tout réel ω, la fonction $f_\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f_\omega(x) = f(\omega x)$ appartient à E.
3. Soit $f \in E$. Prouver que :
   (a) $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
   (b) Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle.
   (c) Si $f(0) = 1$, alors f est paire.

Partie II

Dans cette partie, on se propose de déterminer les fonctions de E qui sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On se donne une telle fonction f.

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

2. En déduire l'existence d'un réel λ tel que

$$(\mathcal{E}_\lambda)\ \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \lambda f(x)$$

3. (a) On suppose dans cette question que $\lambda < 0$. On pose $\lambda = -\omega^2$, où $\omega > 0$. En admettant que les fonctions vérifiant $(\mathcal{E}_\lambda)$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$$

   où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, déterminer les fonctions de E qui sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour lesquelles $\lambda < 0$.

   (b) On suppose dans cette question que $\lambda > 0$. On pose $\lambda = \omega^2$, où $\omega > 0$. En admettant que les fonctions vérifiant $(\mathcal{E}_\lambda)$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \alpha\ \operatorname{ch}(\omega x) + \beta\ \operatorname{sh}(\omega x)$$

   où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, déterminer les fonctions de E qui sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour lesquelles $\lambda > 0$.

   (c) Déterminer les fonctions de E qui sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour lesquelles $\lambda = 0$.

Partie III

Dans cette partie, on ne fait plus d'hypothèse de dérivabilité. On se propose de déterminer les fonctions de E qui s'annulent tout en n'étant pas identiquement nulles. On se donne une telle fonction f.

1. Montrer que $f(0) = 1$ et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On pose $A = \{x > 0, f(x) = 0\}$.
   (a) Montrer que A admet une borne inférieure. Dans la suite, on note $a = \inf A$.
   (b) Prouver que $f(a) = 0$. En déduire que $a > 0$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [0, a[$, $f(x) > 0$.
3. On pose
$$\omega = \frac{\pi}{2a}$$
Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout réel x par
$$g(x) = \cos(\omega x)$$
   (a) Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$,
$$f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$$
   (b) En déduire que pour tout $q \in \mathbb{N}$,
$$f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$$
   (c) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $q \in \mathbb{N}$,
$$f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$$
   (d) Étendre cette propriété à tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{N}$.
4. On pose
$$D_a = \left\{\frac{pa}{2^q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$$
   (a) Montrer que D_a est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $f = g$.

Partie IV

Vous avez fini et vous vous ennuyez ... Déterminez les fonctions de E qui ne s'annulent pas.