Il sera tenu compte dans la note finale de l'orthographe, de la présentation, de la concision et de la rédaction. Les résultats doivent être $\boxed{\textit{encadrés}}$*. Les calculatrices sont interdites. On rappelle que pour rapporter des points, une affirmation doit être justifiée (exemples pris au hasard : I.2.c, II.2.b).*

Partie I

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \neq 0$ par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

1. (a) Montrer que f a une limite en 0 et calculer cette limite. On notera encore f le prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f possède un développement limité à l'ordre 3 en 0. Calculer explicitement ce développement.
   (c) En déduire la dérivabilité de f en 0 et la valeur de $f'(0)$.
2. (a) Étudier le signe de f'.
   (b) Étudier les branches infinies du graphe de f (direction asymptotique, branche parabolique, asymptote, position par rapport à l'asymptote, au voisinage de $\pm\infty$).
   (c) Établir le tableau de variations de f.
3. (a) Montrer que $f''(0)$ existe et déterminer sa valeur.
   (b) Étudier le signe de f''. Que peut-on dire de f ?
   (c) Construire le graphe de f.

Partie II

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(0) = 1$ et, pour tout $x \neq 0$,

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

1. (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! e^x}{x^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k - e^{-x} \right)$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la limite de $g^{(n)}(x)$ lorsque x tend vers 0, $x \neq 0$.
   (c) Montrer que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. (a) Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   On pose dorénavant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = f^{(n)}(0)$.
   (b) Préciser b_0, b_1, b_2, b_3.
3. (a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0$$

   On pourra pour cela considérer la quantité $(fg)^{(n)}(0)$.
   (b) Retrouver à l'aide de la formule précédente les valeurs de b_1, b_2, b_3, et calculer b_4.

Partie III

On pose, pour tout $x \neq 0$,

$$\coth x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}$$

1. (a) Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$u(x) = \frac{x}{2} + f(x)$$

   Montrer que pour tout réel $x \neq 0$,

$$u(x) = \frac{x}{2}\coth \frac{x}{2}$$

   Que dire de la parité de u ?

   (b) Déterminer b_{2n+1} pour tout entier $n \geq 1$.

2. Démontrer que, pour tout réel x non nul,

$$\coth x + \frac{1}{\text{sh } x} = \coth \frac{x}{2}$$

   et

$$\coth x - \frac{1}{\text{sh } x} = \text{th } \frac{x}{2}$$

3. Déterminer, pour tout entier naturel n, les développements limités en 0 à l'ordre $2n + 1$ des fonctions

$$x \longmapsto x \coth x \text{ et } x \longmapsto \frac{x}{\text{sh } x}$$

   On exprimera ces résultats à l'aide des nombres $b_{2k}, k \geq 1$.

4. Déterminer de même pour tout entier naturel n, le développement limité en 0 à l'ordre $2n$ de la fonction $x \longmapsto \text{th } x$, toujours en fonction des nombres b_{2k}.

5. Déterminer pour tout entier naturel n, les développements limités en 0 à l'ordre $2n + 1$ des fonctions

$$x \longmapsto \ln(\text{ch } x) \text{ et } x \longmapsto \ln\left(\frac{\text{sh } x}{x}\right)$$