Ce devoir comporte un exercice et un problème. On rappelle que les résultats doivent être encadrés et que toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont interdites.

Exercice

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, un *chemin de longueur* ℓ est un $(\ell+1)$-uplet d'entiers naturels $\gamma = (a_0, \dots, a_\ell) \in \mathbb{N}^{\ell+1}$ tel que pour tout $k \in [\![0, \ell-1]\!]$, $a_{k+1} - a_k \in \{0, 1\}$. L'entier a_0 est *l'origine* du chemin. L'entier a_ℓ est *l'extrémité* du chemin. Le *graphe* de γ est l'ensemble $\{(0, a_0), (1, a_1), \dots, (\ell, a_\ell)\} \subset \mathbb{N}^2$.

Par exemple, $(1, 1, 2, 3, 3, 3, 4)$ est un chemin de longueur 6 d'origine 1 et d'extrémité 4. Le graphe de ce chemin est $\{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 4)\}$.

Pour tous $a, b, \ell \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma(a, b, \ell)$ l'ensemble des chemins d'origine a, d'extrémité b et de longueur ℓ. Il est immédiat que si $b < a$, alors $\Gamma(a, b, \ell) = \emptyset$.

1. Dessiner les graphes des éléments de $\Gamma(0, 2, 4)$ (faire un dessin différent pour chaque graphe).
2. Soient $a, b, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $a \leq b$.
   (a) Soit $\gamma = (a_0, \dots, a_\ell) \in \Gamma(a, b, \ell)$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, \ell]\!]$, $a_k \leq a_0 + k$.
   (b) Montrer que $\Gamma(a, b, \ell) \neq \emptyset$ si et seulement si $b - a \leq \ell$.
3. Soient $a, b, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq b - a \leq \ell$. Pour tout chemin $\gamma = (a_0, \dots, a_\ell) \in \Gamma(a, b, \ell)$, on pose
$$\varphi(\gamma) = \{k \in [\![0, \ell-1]\!], a_{k+1} = a_k + 1\}$$
   (a) Montrer que $\varphi(\gamma) \in \mathcal{P}_{b-a}([\![0, \ell-1]\!])$.
   On définit ainsi une fonction $\varphi : \Gamma(a, b, \ell) \longrightarrow \mathcal{P}_{b-a}([\![0, \ell-1]\!])$.
   (b) Montrer que φ est une bijection.
   (c) En déduire le cardinal de l'ensemble $\Gamma(a, b, \ell)$.
4. Pour tous $a, \ell \in \mathbb{N}$, on pose
$$\Gamma(a, \ell) = \bigcup_{b=0}^{\infty} \Gamma(a, b, \ell)$$
   L'ensemble $\Gamma(a, \ell)$ est ainsi l'ensemble des chemins d'origine a et de longueur ℓ (et d'extrémité quelconque). Montrer que $\Gamma(a, \ell)$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal.

Problème

On pose, pour tout réel x,
$$f(x) = \int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt$$

1. Montrer que f est effectivement définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
   (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que
$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} f(1)$$
   En déduire une relation entre $f(1)$ et $f(2)$, puis la valeur de $f(2)$.
   (c) Plus généralement, établir pour tout entier naturel n non nul une relation de récurrence entre $f(n)$ et $f(n+1)$. Quelle est la valeur de $f(3)$?

(d) Donner les valeurs de $f(-1)$ et $f(-2)$ sous forme de fractions irréductibles.

3. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Déterminer, pour tout réel $x < 0$, le sens de variation de la fonction $t \longmapsto e^{-x\ln(1+t^2)}$ sur $[0,1]$, puis calculer la valeur de cette fonction en $t = \frac{1}{2}$.

   (b) En déduire que $f(x) \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow -\infty$.

   (c) Déterminer la limite éventuelle de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$. Qu'en déduit-on pour la courbe de f au voisinage de $-\infty$?

5. (a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t^2)$$

   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) \leq \int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}}\,dt$$

   (c) On pose pour tout réel x, $\varphi(x) = \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$.

      i. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$,

$$\varphi(x) \leq \int_0^1 e^{-\frac{u^2}{2}}\,du + 2e^{-\frac{1}{2}}$$

      ii. Pour $x > 0$, exprimer $\int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}}\,dt$ à l'aide de la fonction φ et en déduire que $f(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

6. On pose pour tout réel x,

$$g(x) = -\int_0^1 e^{-x\ln(1+t^2)}\ln(1+t^2)\,dt$$

   La fonction g, tout comme f, est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   (a) *En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange*, montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$|e^\alpha - 1 - \alpha| \leq \frac{\alpha^2}{2}e^{|\alpha|}$$

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leq 1$,

$$|f(x+h) - f(x) - hg(x)| \leq h^2 \int_0^1 e^{-x\ln(1+t^2)}\left(\ln(1+t^2)\right)^2\,dt$$

   (c) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = g$.

   (d) Calculer $f'(0)$.

7. Résumer ce qui précède dans un tableau de variations et tracer la courbe de f.