Exercice 1. A, B, C désignent trois propositions. Les propositions ci-dessous sont-elles des tautologies ? Des contradictions ? Ni l'une ni l'autre ?

1. $(A \implies (B \implies C)) \iff ((A \wedge B) \implies C)$
2. $((A \implies B) \implies C) \iff (A \implies (B \implies C))$
3. $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C)$
4. $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \iff (A \implies C)$
5. $(A \implies B) \iff ((C \implies A) \implies (C \implies B))$

Exercice 2. A, B, C désignent trois propositions. Les propositions sans « prime » ci-dessous sont-elles équivalentes aux propositions « prime » correspondantes ?

1. $P = A \implies (B \vee C)$ et $P' = (A \implies B) \vee (A \implies C)$
2. $Q = A \implies (B \wedge C)$ et $Q' = (A \implies B) \wedge (A \implies C)$
3. $R = (B \vee C) \implies A$ et $R' = (B \implies A) \vee (C \implies A)$
4. $S = (B \wedge C) \implies A$ et $S' = (B \implies A) \wedge (C \implies A)$

Exercice 3. $P(x)$ et $Q(x)$ désignent deux propositions, où x varie dans un ensemble E. Les propositions sans « prime » ci-dessous sont-elles équivalentes aux propositions « prime » correspondantes ? En cas de réponse négative, l'une d'entre-elles implique-t-elle l'autre ?

1. $A = \forall x \in E, P(x) \vee Q(x)$ et $A' = (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$
2. $B = \exists x \in E, P(x) \vee Q(x)$ et $B' = (\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))$

Exercice 4. Reprendre l'exercice précédent en remplaçant $\vee$ par $\wedge$.

Exercice 5. f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire la négation de la proposition P suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathbb{R}, f(x) = f(x') \implies x = x'$$

Dire de plusieurs façons, en langage courant, ce que signifie la proposition P. Dire aussi ce que signifie la proposition $\neg P$.

Exercice 6. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Pour chacune des propositions ci-dessous, dire ce que signifie cette proposition, et écrire sa négation. Donner également un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ pour laquelle la proposition est vraie.

1. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$.
2. $\forall x \in A, \exists M \in \mathbb{R}, x \leq M$.
3. $\exists x \in A, \forall M \in \mathbb{R}, x \leq M$.
4. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x \leq M$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Pour chacune des propositions ci-dessous, dire ce que signifie cette proposition, et écrire sa négation. Donner également un exemple de fonction f pour laquelle la proposition est vraie.

1. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, f(b) = a$.
2. $\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, f(b) = a$.
3. $\forall b \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, f(b) = a$.

4. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, f(b) = a$.

Exercice 8. Soit P la proposition « Tout entier naturel peut s'écrire comme la somme des carrés de deux entiers naturels ».

1. Écrire P en langage symbolique (quantificateurs, variables, connecteurs).
2. Écrire la négation de P, toujours en langage symbolique.
3. P est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant la propriété P ci-dessous.

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

1. Écrire la négation de P.
2. Que dire d'une fonction f vérifiant P ?