Exercice 1. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Démontrer que

$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$$

où $\overline{X}$ désigne pour toute partie X de E le complémentaire de X dans E.

Exercice 2. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$.

Exercice 3. On pose $\overline{0} = \emptyset$, et on définit, pour tout entier naturel n,

$$\overline{n+1} = \overline{n} \cup \{\overline{n}\}$$

Que vaut $\overline{4}$?

Exercice 4. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Comparer (inclusion, égalité éventuelle) les ensembles :

1. $\mathcal{P}(A \cap B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
2. $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Exercice 5. Soient A, B, C trois ensembles. Montrer :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A \cup B & \subset & A \cup C \\ A \cap B & \subset & A \cap C \end{array} \right. \implies B \subset C$$

Exercice 6. Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E. Pour tout $X \subset E$, on pose

$$f(X) = (A \cap X) \cup (B \cap \overline{X})$$

où $\overline{X} = E \setminus X$. Trouver tous les $X \subset E$ tels que $f(X) = \emptyset$.

Exercice 7. Trouver tous les ensembles A et B tels que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap \{5, 6, 7\} = \emptyset$, $B \cap \{1, 2\} = \emptyset$ et $A \cap B = \{3, 4\}$.

Exercice 8. Déterminer

$$\bigcap_{n \geq 1} \left] 1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{2}{n} \right]$$

Exercice 9. Soient

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists a \in \mathbb{R}, x = a(a+1) \text{ et } y = a^2 + (a+1)^2\}$$

et

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x + 1\}$$

A-t-on $A \subset B$? $B \subset A$?

Exercice 10. Soient

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, x = ab \text{ et } y = a^2 + b^2\}$$

et

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y - 2x \geq 0 \text{ et } y + 2x \geq 0\}$$

A-t-on $A \subset B$? $B \subset A$?

Exercice 11. Soient

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} + 1\}$$

et

$$B = \mathbb{R} \times \{0\}$$

A-t-on $A \subset B$? $B \subset A$?