Exercice 1. Les applications ci-dessous sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x - 1$.
2. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2 - z - 1$. On admettra que toute équation du second degré admet au moins une solution complexe.
3. $f : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $f(a, b, c) = 2^a 3^b 5^c$. On admettra que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 s'écrit de façon unique comme un produit de nombres premiers.
4. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$.

Exercice 2. Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E. Soit $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par

$$f(X) = (A \cap X, B \cap X)$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 3. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 4. Soit E un ensemble. Soit $\varphi : E \longrightarrow P(E)$. On pose

$$A = \{x \in E, x \notin \varphi(x)\}$$

On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) = A$. A-t-on $a \in A$? Que vient-on de démontrer ?

Exercice 5. Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$$

2. Soient $A', B' \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que

$$A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$$

Exercice 6. Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Montrer que

$$f \text{ est injective } \iff \forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

3. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. Montrer que $\forall A', B' \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.
5. Montrer que $\forall A', B' \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

Exercice 7. Soit $f : E \longrightarrow F$. Montrer :

1. $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) \supset A$.
2. f est injective $\iff \forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 8. Créer (et résoudre) un exercice similaire au précédent, mais faisant intervenir $f \circ f^{-1}$ au lieu de $f^{-1} \circ f$.

Exercice 9. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = 2x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f(x) = 2(1-x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Tracer les graphes de f, de $f \circ f$ et de $f \circ f \circ f$.
2. On pose $f^0 = id$ puis, pour tout entier naturel n, $f^{n+1} = f^n \circ f$. Calculer, pour tout entier naturel n, $f^n\left(\left[\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right]\right)$.

Exercice 10. Soit $f : E \longrightarrow F$. Démontrer que f est surjective si et seulement si pour tout ensemble G, pour toutes applications $g : F \longrightarrow G$ et $h : F \longrightarrow G$, on a

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

Exercice 11. Créer (et résoudre) un exercice similaire pour les injections.

Exercice 12. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Étant donnés $x, y \in E$, on dit que y est un *successeur* de x lorsque $x < y$ et

$$\forall z \in E, x < z \leq y \implies z = y$$

1. Montrer que si l'ensemble E est totalement ordonné alors le successeur d'un élément (s'il existe) est unique.
2. Donner un exemple d'ensemble ordonné dans lequel aucun élément n'admet de successeur.
3. Dessiner les entiers de 0 à 12 et relier chaque entier à ses successeurs pour l'ordre usuel des entiers.
4. Dessiner les entiers de 0 à 12 et relier chaque entier à ses successeurs pour la relation d'ordre « divise ».

Exercice 13. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit qu'un élément x de E est minimal lorsque

$$\forall y \in E, y \leq x \implies y = x$$

1. Montrer que si l'ensemble E est totalement ordonné alors, si E a un élément minimal, il est unique et c'est le plus petit élément de E.
2. Soit A un ensemble. Soit $E = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$, muni de la relation « $\subset$ ». Quels sont les éléments minimaux de E ?
3. Soit $E = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, muni de la relation « divise ». Quels sont les éléments minimaux de E ?
4. (délicat) Montrer que tout ensemble ordonné fini non vide possède au moins un élément minimal.

   Indication : on fera une récurrence sur le nombre d'éléments de l'ensemble.

Exercice 14. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^3 - x = y^3 - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Quelle est la classe de 0 ?
3. Plus généralement, déterminer la classe de x pour tout réel x.

Exercice 15. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^4 \equiv y^4[8]$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Combien $\mathcal{R}$ possède-t-elle de classes ?