Exercice 1. Montrer l'existence de trois réels a, b et c tels que

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

En déduire une expression simplifiée de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

puis l'éventuelle limite de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2. Pour les suites récurrentes ci-dessous, donner une expression de u_n en fonction de n.

1. $u_{n+1} = 4(u_n - u_n^2), 0 \leq u_0 \leq 1$. On pourra poser $u_0 = \sin^2 \alpha$.
2. $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, -2 \leq u_0 \leq 2$. On pourra poser $u_0 = 2\cos\theta$.

Exercice 3. Soit u une suite réelle telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\geq 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n})_{n\geq 0}$ convergent. Montrer que la suite u est convergente.

Exercice 4. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Démontrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A telle que $a_n \longrightarrow x$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On pose, pour tout $n \geq 1$,

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. On suppose que la suite u tend vers un réel ℓ. On se donne un réel $\varepsilon > 0$. Soit N tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Soit $n \geq N$. Montrer que

$$|U_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - \ell| + \varepsilon$$

2. En déduire l'existence d'un entier N' tel que $\forall n \geq N', |U_n - \ell| \leq 2\varepsilon$. Conclusion ?
3. Le résultat ci-dessus (si une suite est convergente, alors elle est convergente « en moyenne ») est appelé le théorème de Cesaro. Sa réciproque est-elle vraie ?

Exercice 6. Soient a et b deux réels strictement positifs. Étudier les deux suites u et v définies par récurrence par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et

$$\forall n \geq 0, \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} & = & \sqrt{u_n v_n} \end{array} \right.$$

Exercice 7. Soient a et b deux réels strictement positifs. Étudier les deux suites u et v définies par récurrence par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et

$$\forall n \geq 0, \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} & = & \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{array} \right.$$

Exercice 8. Pour $n \geq 0$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 9. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

En étudiant deux suites extraites, prouver que cette suite est convergente.

On peut prouver que la limite de la suite u est $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$ *mais ceci est une autre histoire.*

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} en fonction de v_n.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n et de v_0.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n et de v_0.
4. Montrer que u_n tend vers $\sqrt{a}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. On prend $u_0 = a = 2$. Quelle est l'erreur commise en approchant $\sqrt{2}$ par u_{10} ?

Exercice 11. Pour tout $n \geq 0$ on pose

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

1. Montrer que cette suite est convergente. On note e sa limite.
2. Soient n, p deux entiers naturels, $n < p$. Montrer que

$$0 < e_p - e_n \leq \frac{1}{n!n}$$

3. En déduire que

$$\forall n \geq 0, 0 < e - e_n \leq \frac{1}{n!n}$$

4. Déduire de ce qui précède que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 12. Déterminer, pour les suites ci-dessous, u_n en fonction de n.

1. $u_0 = 1, u_1 = -2, \forall n \geq 0, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
2. $u_0 = 3, \forall n \geq 0, u_{n+1} = 3u_n + 2$.
3. $u_0 = 1, u_1 = -2, \forall n \geq 0, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.