Exercice 1. La suite réelle u tend vers 0. Calculer la limite éventuelle de la suite v :

1. $$v_n = \frac{\ln(1 + 2\tan^2 u_n)}{\sin^2 u_n}$$
2. $$v_n = \frac{\ln\cos(2u_n)}{e^{3u_n^2} - 1}$$
3. $$v_n = \frac{(\sqrt[5]{1 + 3u_n} - 1)(\sqrt[3]{1 + 5u_n} - 1)}{u_n^2 + 2u_n^3}$$

Exercice 2. Donner un équivalent simple de la suite u :

1. $$u_n = n(\sqrt[n]{5} - 1)$$
2. $$u_n = (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$$
3. $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:
$$u_n = \log_a\left(a + \frac{1}{n}\right) - \log_{a+\frac{1}{n}}(a)$$
4. $a > 0$:
$$u_n = a^{a+\frac{1}{n}} - \left(a + \frac{1}{n}\right)^a$$
5. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\cos\alpha \neq 0$:
$$u_n = \left(\frac{\cos(\alpha + \frac{\beta}{n})}{\cos\alpha}\right)^n$$

Exercice 3.

1. La suite u tend vers 0. Calculer la limite éventuelle de la suite de terme général
$$(\cos u_n)^{\frac{1}{\sin^2 u_n}}$$
2. La suite u tend vers $\frac{\pi}{4}$. Calculer la limite éventuelle de la suite de terme général
$$(\tan u_n)^{\operatorname{cotan}(4u_n)}$$
3. La suite u tend vers $a \in \mathbb{R}^*$. Calculer la limite éventuelle de la suite de terme général
$$\left(2 - \frac{u_n}{a}\right)^{\tan\frac{\pi u_n}{2a}}$$
4. La suite u tend vers $+\infty$. Calculer la limite éventuelle de la suite de terme général
$$\left(\frac{\ln u_n}{\ln(u_n + 1)}\right)^{u_n \ln u_n}$$

Exercice 4. On considère la suite u définie par récurrence par $u_0 \in]0, 1[$ et
$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. Montrer que cette suite converge vers 0.
2. Trouver un réel α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tende vers une limite finie non nulle.
3. Utiliser le théorème de Cesàro pour en déduire un équivalent simple de u_n.