**Exercice 1.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$. Étudier la continuité de $f$.

**Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 1$. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos x$$

1. Exprimer, pour tout réel $x$ et tout entier naturel $n$, $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) \sin \frac{x}{2^n} = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \frac{\sin x}{2^n}$$

3. En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \neq 0$.
4. Conclure.

**Exercice 3.**

1. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$(E)\ \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

2. En déduire les applications continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$(E')\ \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x)f(y)$$

**Exercice 4.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

1. Tracer le graphe de $f$.
2. Montrer que $f$ est continue en 0.

**Exercice 5.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, ayant une limite finie en $-\infty$ et $+\infty$. Prouver que $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 6.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique, ayant une limite en $+\infty$. Que dire de $f$ ?

**Exercice 7.** Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ vérifiant $a < 0$ et $b > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, tendant vers $a$ en $-\infty$ et vers $b$ en $+\infty$. Prouver que $f$ s'annule. (théorème des valeurs intermédiaires « généralisé »).

**Exercice 8.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel $x$ tel que $f(x) = x$.

**Exercice 9.** Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Soit $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f$ admet une limite en $a$ et en $b$, et que ces limites sont égales. Prouver que $f$ n'est pas injective.

**Exercice 10.** On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

1. L'ensemble $\mathcal{L}$ est-il stable pour l'addition ? Pour la multiplication par un réel ? Pour la multiplication des applications ? Pour la composition ?
2. Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}$, soit $K(f)$ l'ensemble des réels $k$ tels que $f$ soit $k$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrer que $K(f)$ possède un plus petit élément. On note $k(f)$ ce réel.
3. Pour $f, g \in \mathcal{L}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, que peut-on dire de $k(f + g)$, de $k(\lambda f)$, de $k(g \circ f)$ ?

**Exercice 11.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ est eunitnoc en $a$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \varepsilon \implies |f(x) - f(a)| \leq \alpha$$

1. Montrer que toute fonction bornée sur $\mathbb{R}$ est eunitnoc en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si $f$ est eunitnoc en un point, elle est eunitnoc en tout point.
3. Montrer que $f$ est eunitnoc si et seulement si elle est bornée sur tout segment.

**Exercice 12.** Soit $S$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : S \longrightarrow S$ continue.

1. Montrer que $f$ admet un point fixe.
2. Ce résultat reste-t-il valable si $S$ est un intervalle ?

**Exercice 13.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, ne s'annulant pas, et telles que

$$\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)|$$

Montrer que $g = f$ ou $g = -f$.

**Exercice 14.**

1. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Soient $a, b \in I$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que
$$f(c) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$$
On pourra considérer la fonction $g : x \longmapsto 2f(x) - f(a) - f(b)$.
2. Plus généralement, soient $p, q$ deux réels positifs. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que
$$pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$$
3. Encore plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in I$, soient $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que
$$\sum_{k=1}^{n} t_k f(a_k) = f(c) \sum_{k=1}^{n} t_k$$