Exercice 1. Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous : déterminer l'ensemble de définition de f, puis le ou les intervalles sur lesquels les théorèmes du cours permettent d'affirmer que f est dérivable. Enfin, dériver f.

1. $f(x) = \sin \sin \sin \sin x$
2. $f(x) = \ln |\tan \frac{x}{2}|$
3. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
4. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right|$
5. $f(x) = x^x$
6. $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$.

Exercice 2. Soit $f : x \longmapsto \sqrt[3]{x^2 - x^3}$. Quel est l'ensemble de définition de f ? Sur quel ensemble f est-elle continue ? Sur quels intervalles f est-elle dérivable ?

Exercice 3. Soit $f : x \longmapsto \cos\sqrt{x}$, définie sur $\mathbb{R}_+$. Où la fonction f est-elle continue ? Dérivable ? f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 4. Pour chacune des fonctions définies ci-dessous : déterminer son ensemble de définition, puis le ou les intervalles sur lesquels les théorèmes du cours permettent d'affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Enfin, calculer pour tout entier n la dérivée $n$ième de la fonction.

1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$, $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
2. $f(x) = e^x \cos x$, $g(x) = e^x \sin x$.

Exercice 5. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$(\star)\ \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 vérifiant

$$(\star)\ \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.
4. Réciproque ?

Exercice 7. Soit f une fonction dérivable en un réel a. Déterminer la limite éventuelle lorsque x tend vers a, $x \neq a$, de
$$\frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

Exercice 8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f est lipschitzienne sur I si et seulement si sa dérivée est bornée.

Exercice 9.

1. Démontrer à l'aide du théorème des accroissements finis que

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

2. En déduire la limite lorsque n tend vers l'infini de

$$S_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$$

3. Plus généralement, étant donné un entier $k \geq 2$, déterminer la limite lorsque n tend vers l'infini de

$$S_{nk} = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$$

Exercice 10.

1. Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Démontrer qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

On pourra considérer la fonction $h : x \longmapsto f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$.

2. (Règle de l'Hospital) Soient f et g deux fonctions dérivables au voisinage d'un réel a et telles que $f(a) = g(a) = 0$, et $g, g' \neq 0$ au voisinage de a (sauf peut-être en a). Montrer que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque $x \longrightarrow a$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \ell$ lorsque $x \longrightarrow a$.
3. Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}, \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}, \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = \ell$.

1. On suppose connue une fonction $\varphi :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable, surjective, et telle que $\forall x \in]-1,1[, \varphi'(x) > 0$. Soit $\overline{f} : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \overline{f}(x) & = & f \circ \varphi(x) \text{ si } x \neq \pm 1 \\ \overline{f}(-1) & = & \overline{f}(1) = \ell \end{cases}$$

Montrer que $\overline{f}$ satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle. En déduire l'existence d'un réel c tel que $f'(c) = 0$.

2. Montrer que l'application φ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

satisfait aux exigences de la question précédente.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant pour tout entier n $\lim_{-\infty} f^{(n)} = \lim_{\infty} f^{(n)} = 0$. Prouver que pour tout entier n, la dérivée $n$ième de f s'annule au moins n fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x^2}$. Démontrer que

$$\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{-x^2}$$

où P_n est un polynôme de degré n ayant n racines réelles distinctes.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si $f'(x)$ a une limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, alors, $\frac{f(x)}{x}$ tend aussi vers ℓ lorsque $x \longrightarrow \infty$. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 15. Théorème de Darboux. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.

1. Montrer que f possède un minimum sur $[a, b]$.
2. Prouver que ce minimum ne peut être atteint ni en a, ni en b.
3. En déduire l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$
4. En déduire que l'image d'un intervalle par une fonction dérivée est un intervalle.
5. On sait qu'il existe des fonctions dérivées discontinues. Que nous apprend le résultat précédent sur l'allure des discontinuités d'une dérivée ?

Exercice 16.

1. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$(\star)\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

2. Même question, mais on suppose seulement la continuité de f.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer :

$$\forall x > 0, \exists c \in]0, x[, f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$$

Exercice 18. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Pour quelles valeurs de α la fonction f est-elle continue ? Dérivable ? $\mathcal{C}^1$? Lipschitzienne ?