Exercice 1.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}\left(e^a + e^b\right)$$

2. Soient $a, b, c \in [0, \pi]$. Montrer que
$$\sin\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{1}{3}(\sin a + \sin b + \sin c)$$

3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\ln\frac{a+2b+3c+4d}{10} \geq \frac{1}{10}(\ln a + 2\ln b + 3\ln c + 4\ln d)$$

4. Soient $a, b, c, d, e \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que
$$\tan\frac{a+4b+6c+4d+e}{16} \leq \frac{1}{16}(\tan a + 4\tan b + 6\tan c + 4\tan d + \tan e)$$

Exercice 2. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $a, b > 0$. En utilisant la concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que
$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

Exercice 3. En utilisant la concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$,
$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Exercice 4. Utiliser l'exercice précédent pour montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$, on a
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

2. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
$$1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x$$

3. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,
$$x \leq \tan x \leq \frac{4}{\pi}x$$

Exercice 6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \max_{[a,b]} |f''|$.

1. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - \frac{M}{2}(x - a)(b - x)$$

Montrer que g est convexe.

2. Soit $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [a, b]$ par

$$h(x) = f(x) + \frac{M}{2}(x - a)(b - x)$$

Montrer que h est concave.

3. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f(x)| \leq \frac{M}{2}(x - a)(b - x)$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective, convexe.

1. On suppose que $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ et que f' ne s'annule pas (et donc f' est de signe constant). Que dire du signe de $(f^{-1})''$? Conclusion ?
2. On ne suppose plus que f est dérivable. Que dire de f^{-1} ?

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que f a une limite en $+\infty$ (réelle ou $+\infty$ ou $-\infty$).
2. Montrer que $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ a une limite en $+\infty$ (réelle ou $+\infty$) .
3. Si $\frac{f(x)}{x} \longrightarrow a \in \mathbb{R}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$, montrer que $f(x) - ax$ a une limite en $+\infty$ (réelle ou $-\infty$).