Exercice 1. Résoudre les équations ci-dessous :

1. $x, y \in \mathbb{Z}, 42x - 37y = 4$
2. $x, y \in \mathbb{Z}, 32x + 36y = 2$
3. $x, y \in \mathbb{Z}, 32x + 36y = 4$
4. $a, b \in \mathbb{N}, a \vee b - a \wedge b = 21$. On posera $a = \delta a_1, b = \delta b_1$ avec $a_1 \wedge b_1 = 1$.
5. $a, b \in \mathbb{N}, a + b = 144, a \vee b = 420$. Même indication.

Exercice 2. Soient a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$.
2. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
3. Réciproque ?

Les nombres $M_n = 2^n - 1$ sont appelés les *nombres de Mersenne*.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = 2^n - 1$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. Quel est le reste de la division euclidienne de M_a par M_b ?
2. Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que $M_a \wedge M_b = M_{a \wedge b}$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2. Réciproque ? Les nombres $F_n = 2^{2^n} + 1$ sont appelés les *nombres de Fermat*.

Exercice 5. Quel est le nombre de chiffres en base 10 du nombre de Fermat F_{10} ?

Exercice 6.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. On suppose $a_n \neq 0$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

   Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $P(x) = 0$. On pose $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. Montrer que p divise a_0 et q divise a_n.
2. Résoudre l'équation (E) $7x^3 + 4x^2 + 4x - 3 = 0$.

Exercice 7. Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose que a et b sont premiers entre-eux. Montrer que $a + b$ et ab sont premiers entre-eux.

Exercice 8. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 9. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que

$$a \vee (a + 5) = b \vee (b + 5)$$

Prouver que $a = b$.

Exercice 10. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. On suppose que p est premier. Résoudre l'équation « $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, x^2 = 1$ » et en déduire qu'il existe exactement deux éléments non nuls du corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ égaux à leur inverse.
2. Toujours en supposant p premier, considérer le produit des éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, regrouper les facteurs deux par deux, et en déduire que $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.
3. On suppose que p n'est pas premier et $p \neq 4$. Montrer qu'il existe deux entiers *distincts* a et b tels que $ab \equiv 0[p]$, $2 \leq a < p$ et $2 \leq b < p$. En déduire que $(p-1)! \equiv 0 \mod p$.
4. Calculer $(4-1)!$ modulo 4.

5. Montrer le *théorème de Wilson* : p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $D(n)$ la somme des diviseurs de n.

1. Calculer $D(n)$ pour tous les entiers n compris entre 1 et 20.
2. Calculer $D(p^\alpha)$ pour tout nombre premier p et tout entier $\alpha \geq 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Démontrer que l'application
$$\varphi : \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b) \longrightarrow \mathcal{D}(ab)$$
définie par $\varphi(d_1, d_2) = d_1 d_2$ est une bijection.
4. En déduire que pour tous entiers a et b premiers entre eux, $D(ab) = D(a)D(b)$.
5. Que valent $D(2024)$ et $D(2025)$?

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $D(n)$ la somme des diviseurs de n et $D'(n) = D(n) - n$ la somme des diviseurs *stricts* de n. On dit que n est un *nombre parfait* lorsque $D'(n) = n$.

1. Déterminer tous les nombres parfaits compris entre 1 et 20.

Soit n un nombre parfait pair. On écrit $n = 2^\alpha m$, avec m impair et $\alpha \geq 1$.

2. Montrer que $2^{\alpha+1} m = (2^{\alpha+1} - 1)D(m)$
3. En déduire que $m = (2^{\alpha+1} - 1)D'(m)$
4. On pose $p = D'(m)$, de sorte que $m = (2^{\alpha+1} - 1)p$. Montrer que $p = 1$. On pourra raisonner par l'absurde.
5. Prouver que $m = 2^{\alpha+1} - 1$ est premier. Qu'en déduit-on sur $\alpha + 1$?

Ainsi, tout nombre parfait pair est de la forme $n = 2^{\beta-1}(2^\beta - 1)$ où β est un nombre premier tel que $2^\beta - 1$ soit également premier.

6. Prouver la réciproque.