Exercice 1. Calculer les primitives des fonctions f ci-dessous. On dira à chaque fois sur quel(s) intervalle(s) les primitives sont calculées.

1. $f(x) = \frac{1-x}{x^2+x+1}$
2. $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}$
3. $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$. Poser $t = \sqrt[6]{x}$.
4. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$. Poser $t = \arcsin x$, puis intégrer par parties.
5. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}$ et $g(x) = \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$. On pourra intégrer $f+g$ et $f-g$.
6. $f(x) = (x^3 - x - 1)e^x$
7. $f(x) = e^x \sin x$
8. $f(x) = \frac{\ln \ln x}{x}$
9. $f(x) = x^2 \arctan(3x)$
10. $f(x) = \sin \ln x$
11. $f(x) = \arcsin^2 x$
12. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$
13. $f(x) = \frac{1}{2-\cos x}$ et $f(x) = \frac{1}{2-\sin x}$. Poser $t = \tan \frac{x}{2}$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles où la fonction en facteur de y' ne s'annule pas. Résoudre ensuites ces mêmes équations sur l'intervalle « le plus grand possible ».

1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$.
2. $xy' \ln x - y = -\frac{1}{x}(\ln x + 1)$.
3. $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$.
4. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$.
5. $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$.
6. $2xy' + y = x^n$ (n entier naturel).
7. $(x - 1)y' + (x - 2)y = x(x - 1)^2$.
8. $(x + 1)y' - xy + 1 = 0$.

Exercice 3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \cos x - x - \int_0^x (x - t)f(t)\, dt$$

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(1 - x)$$

On montrera auparavant que de telles fonctions sont nécessairement deux fois dérivables.

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations linéaires d'ordre 2 ci-dessous.

1. $y'' + 3y' + 2y = e^x$.
2. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$.
3. $y'' - y = \text{ch } x$.
4. $y'' + y = x \sin x$.

Exercice 6. Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad y'' \cos x + y' \sin x - y \cos^3 x = 0$$

Soit f une une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I où $\cos x$ ne s'annule pas. Montrer qu'il existe une fonction φ telle que, en posant $f = g \circ \varphi$, f est solution de $(\mathcal{E})$ sur I si et seulement si g est solution d'une équation différentielle à coefficients constants. Résoudre sur les intervalles où $\cos x$ ne s'annule pas.

Exercice 7. Soit l'équation différentielle

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + x + 1)y = 0$$

Poser « $y = z\frac{e^{-x}}{x}$ » et résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Donner ensuite les solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit l'équation différentielle

$$(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$$

1. S'inspirer de l'exercice 6 pour se ramener à une équation différentielle à coefficients constants.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$$

où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$.

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En posant « $g(t) = f(e^t)$ », montrer que f est solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si g est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants.
2. Résoudre l'équation $x^2 y'' - xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$, puis sur $\mathbb{R}$.