**Exercice 1.** Soit
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$
Quelle est la structure de $G$ ?

**Exercice 2.** Soient $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit
$$\mathbb{A} = \{aI + bS, a, b \in \mathbb{R}\}$$
Quelle est la structure de $\mathbb{A}$ ? Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{A}$ ?

**Exercice 3.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $N = A - I_3$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N^k$. En déduire $A^n$ pour tout entier naturel $n$, puis pour tout entier relatif $n$.

**Exercice 4.** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Calculer, lorsqu'elle existe, la matrice $A^{-1}$.

**Exercice 5.** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On dit que la matrice $A$ est *magique* lorsque la somme des coefficients de chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales de $A$ est constante. On note $S(A)$ la somme commune en question.

1. Trouver toutes les matrices magiques antisymétriques.
2. Trouver toutes les matrices magiques symétriques $A$ telles que $S(A) = 0$.
3. En déduire toutes les matrices magiques symétriques.
4. En déduire toutes les matrices magiques.

**Exercice 6.** Soit $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un anneau non commutatif dont tous les éléments ont un inverse. On note 0 et 1 ses neutres respectifs pour l'addition et la multiplication.
2. Résoudre l'équation $q \in \mathbb{H}, q^2 = -1$.
3. Résoudre l'équation $q \in \mathbb{H}, q^2 = 1$.

**Exercice 7.** Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2$ en fonction de $I$ et de $B$. En déduire $B^{-1}$.

**Exercice 8.** Soient $C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$. Soit $A = CL$. On note $\lambda = LC$. Démontrer que pour tout entier $k \geq 1$,
$$A^k = \lambda^{k-1} A$$

**Exercice 9.** Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Inverser si possible la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 10.** Inverser si possible la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 11.** Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Soit $M = aI_3 + bA$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2$. En déduire $A^n$ et $M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 12.** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = AI + bA$.
2. Montrer que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe deux réels $a_n$ et $b_n$ tels que $A^n = a_nA + b_nI$.
4. Calculer $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 13.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $(\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda I$.

**Exercice 14.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^3$ et en déduire $(A + I)^n$ pour tout $n \geq 3$.