

Exercice 1. Soit $n \geq 1$. Soit

$$P = (X - 2)^n + (X - 3)^n + 1$$

Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X - 2$? Par $(X - 2)(X - 3)$? Par $(X - 2)^2(X - 3)$?

Exercice 2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z}$.

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $P - X$ divise $P^k - X^k$.
2. En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - P$.
3. En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

Exercice 4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(2) = 6$, $P'(2) = 1$, $P''(2) = 4$ et $\forall n \geq 3, P^{(n)}(2) = 0$.

Exercice 5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Montrer que P' est scindé.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit

$$P = aX^{n+1} + bX^n + 1$$

Déterminer une CNS sur a et b pour que P soit divisible par $(X - 1)^2$.

Exercice 7. Résoudre : $P \in \mathbb{R}[X], P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Exercice 8. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 7 tels que $(X - 1)^4 | (P + 1)$ et $(X + 1)^4 | (P - 1)$. On pourra s'intéresser tout d'abord à P' .

Exercice 9. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ dont la fonction polynôme associée est périodique (on autorise une période complexe).

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Factoriser $P_n = (X + i)^n - (X - i)^n$ sur \mathbb{C} .
2. En déduire la valeur de

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

Exercice 11.

1. Soit $P = (X + 1)^5 - X^5$. Trouver $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P = R \circ (X(X + 1))$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^2(k+1)^2$$

Exercice 12. Quel est le pgcd de $2X^4 + 11X^3 + 10X^2 - 5X - 3$ et $2X^3 + 5X^2 + 5X + 3$?

Exercice 13. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaires, de degré 3, divisibles par $X - 1$, et dont les restes des divisions euclidiennes par $X - 2$, $X - 3$ et $X - 4$ sont égaux.

Exercice 14. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $A = X^2 - 2X \cos \theta + 1$.

1. Factoriser A sur \mathbb{C} .

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, A divise

$$P = X^n \sin \theta - X \sin n\theta + \sin(n-1)\theta$$

Exercice 15. Factoriser le polynôme $P = X^6 + 1$ sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} .

Exercice 16. Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + pX^2 + qX + 2$.

Exercice 17. Soit $P = X^5 + X + 1$.

1. Montrer que P n'a pas de racine dans \mathbb{Q} .
2. Montrer que j est racine de P .
3. Factoriser P sur $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 18. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P .