Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient F et G deux hyperplans distincts de E. Quelle est la dimension de $F+G$? De $F \cap G$?

Exercice 2. On se place dans $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = e_1$.

1. Prouver que $f \in GL(E)$.
2. Soit $u \in E \setminus \{0\}$. Soit $D =< u >$. Montrer que D est stable par f si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$.
3. Trouver toutes les droites de E stables par f.
4. Soit P un plan de E d'équation $ax + by + cz = 0$. Montrer que $f(P)$ est un plan, et en déterminer une équation. En déduire tous les plans de E stables par f.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

1. Prouver que $\ker f = \operatorname{Im} f$.
2. Prouver l'existence d'une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = 0$.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $f \circ f = -id_{\mathbb{R}^2}$.

1. Trouver $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Prouver l'existence d'une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = -e_1$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. Peut-il exister un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$?

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^5$, on se donne $u_1 = (1, 2, -4, 3, 1)$, $u_2 = (2, 5, -3, 4, 8)$, $u_3 = (6, 17, -7, 10, 22)$ et $u_4 = (1, 3, -3, 2, 0)$.

1. Quel est le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) ?
2. Trouver α et β tels que $u = (2, 4, 6, \alpha, \beta)$ appartienne à l'espace engendré par les $x_i, i \in [\![1, 4]\!]$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient F et G deux s.e.v. de E. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\ker f = F$ et $\operatorname{Im} f = G$ si et seulement si $\dim F + \dim G = n$.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle valeur propre de f tout scalaire λ vérifiant : $\exists x \in E \setminus \{0\}, f(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x est appelé vecteur propre pour f associé à la valeur propre λ.

Étant donné $\lambda \in \mathbb{K}$, on note

$$E_\lambda = \{x \in E, f(x) = \lambda x\} = \ker(f - \lambda id_E)$$

Si λ est une valeur propre de f, on a $E_\lambda \neq \{0\}$. On appelle E_λ le sous-espace propre associé à λ. C'est clairement un sev de E (noyau). Ce sev contient donc tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ, plus le vecteur nul.

1. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres d'une homothétie ? D'un projecteur ? D'une symétrie ?
2. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de l'application $f : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie par $f(\varphi) = \varphi'$?
3. Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda id_E$ n'est pas injective.
4. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de f. Montrer que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont en somme directe.

5. Plus généralement, soient λ_1,...,λ_p p valeurs propres distinctes de f. Montrer que $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe. On procèdera par récurrence sur p.

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (e, f(e), f^2(e), \dots, f^{n-1}(e))$ soit une base de E.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = -id_E$.

1. On suppose que $\dim E > 0$. Soit $e_1 \in E \setminus \{0\}$. Prouver que $(e_1, f(e_1))$ est libre.
2. On suppose que $\dim E > 2$. Soit $e_2 \notin < e1, f(e_1) >$. Montrer que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est libre.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose trouvés $e_1, \dots, e_p \in E$ tels que $(e_1, f(e_1), \dots, e_p, f(e_p))$ soit libre. Montrer que si $\dim E > 2p$, alors il existe un vecteur $e_{p+1} \in E$ tel que
$$(e_1, f(e_1), \dots, e_{p+1}, f(e_{p+1}))$$
soit libre.
4. Déduire de ce qui précède que :
   (a) La dimension de E est paire : $\exists q \in \mathbb{N}^*, n = 2q$.
   (b) Il existe une base de E de la forme $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 10. On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z + 2t = 0\}$.

1. Montrer que G est un sev de E et donner une base de G.
2. Soit $F =< (1, 1, 0, -1), (1, 0, 0, -1), (1, 0, -1, 0) >$. Quelle est la dimension de F ?
3. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 11. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(e_1) = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f(e_2) = -4e_2 - 2e_3$, $f(e_3) = 4e_1 + 12e_2 + 5e_3$. Déterminer le noyau, l'image et le rang de f.

Exercice 12. Un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit nilpotent lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$.

1. Soit $E = \{0\}$. Soit $f = 0 \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f^0 = 0$.
2. Montrer que si $\dim E \geq 1$, un endomorphisme nilpotent de E n'est pas bijectif.
3. Soit $n \geq 1$. On suppose que pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension strictement inférieure à n, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, on a $f^{\dim E} = 0$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme nilpotent de E. En considérant l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f$, montrer que $f^n = 0$.
4. Conclusion ?

Exercice 13. Déterminer rang, noyau et image de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$f(x, y, z) = (2x - y + z, x - 3y - z, 3x - 4y)$$

Exercice 14. Déterminer rang, noyau et image de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$f(x, y, z) = (2x - y + z, 4x - 2y + 2z, -2x + y - z)$$

Exercice 15. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f \neq 0$, $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = f(e_3) = 0$.

Exercice 16. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 \neq 0$, $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = 0$.