

**Exercice 1.** Calculer pour les permutations ci-dessous : leur décomposition en produit de cycles de supports disjoints, une décomposition en produit de transpositions, leur ordre, leur inverse, leur signature.

$$1. \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 7 & 6 & 5 & 1 & 10 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2. \sigma = (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5)(4\ 5\ 6)$$

$$3. \sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 3\ 4\ 5)(3\ 4\ 5\ 6)$$

$$4. \sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 5)^{-1}$$

**Exercice 2.** Pour quelles valeurs de  $n$  le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  est-il *abélien*? Même question pour le groupe alterné  $\mathfrak{A}_n$ .

**Exercice 3.** Montrer que pour tout  $n \geq 3$ , le groupe alterné  $\mathfrak{A}_n$  est *engendré* par les 3-cycles (i.e. toute permutation paire est un produit de 3-cycles).

**Exercice 4.**

1. Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Montrer que  $\sigma$  commute avec toutes les permutations si et seulement si  $\sigma$  commute avec toutes les transpositions.
2. Trouver le *centre* de  $\mathfrak{S}_n$ , c'est à dire les permutations qui commutent avec toutes les permutations de  $\mathfrak{S}_n$ .

**Exercice 5.** Déterminer de même le centre de  $\mathfrak{A}_n$ . On fera appel à des 3-cycles.

**Exercice 6.** Montrer que toute permutation de  $\mathfrak{S}_n$  est un produit de transpositions du type  $(i\ i+1)$  où  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

**Exercice 7.** Montrer que la transposition  $\tau = (1\ 2)$  et le cycle  $\gamma = (1\ 2\ \dots\ n)$  *engendrent*  $\mathfrak{S}_n$ , c'est à dire que toute permutation de  $\mathfrak{S}_n$  est un produit où n'apparaissent que les permutations  $\tau$ ,  $\gamma$  et  $\gamma^{-1}$ .

**Exercice 8.** Soient  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $\gamma = (x_1\ \dots\ x_k)$  un cycle de longueur  $k$ .

1. Montrer que  $\sigma\gamma\sigma^{-1}$  est un cycle que l'on déterminera.
2. Application : calculer  $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(2\ 3\ 4\ 5\ 6)(5\ 4\ 3\ 2\ 1)$ .
3. Inversement, soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux cycles de même longueur  $k$  dans  $\mathfrak{S}_n$ . Existe-t-il  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $\gamma' = \sigma\gamma\sigma^{-1}$ ?

**Exercice 9.** Soit  $(G, \times)$  un groupe fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $g \in G$ , on note  $\tau_g$  l'application  $G \rightarrow G$  définie pour tout  $x \in G$  par  $\tau_g(x) = gx$ .

1. Montrer que pour tout  $g \in G$ ,  $\tau_g \in \mathfrak{S}(G)$ .
2. Soit  $\tau : G \rightarrow \mathfrak{S}(G)$  définie par  $\tau(g) = \tau_g$ . Démontrer que  $\tau$  est un morphisme injectif de groupes.
3. Démontrer le *théorème de Cayley* : tout groupe fini de cardinal  $n$  est isomorphe à un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ .

**Exercice 10.** Montrer que les transpositions  $(1\ i)$ ,  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  engendrent  $\mathfrak{S}_n$ .

**Exercice 11.** Soit  $f : (\mathfrak{S}_n, \circ) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$  un morphisme de groupes.

1. Soit  $\tau$  une transposition. Que vaut  $f(\tau)$ ?
2. Soient  $\tau, \tau'$  deux transpositions. Montrer qu'il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$ .

3. En déduire que toutes les transpositions ont même image par  $f$ .

4. Déterminer  $f$ .

**Exercice 12.** Soit  $n \geq 2$ . Soit  $\gamma = (1\ 2\ \dots\ n)$ . Déterminer toutes les permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  qui commutent avec  $\gamma$ .

**Exercice 13.** Soit  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\sigma^{2025}$ .

**Exercice 14.** Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux cycles de  $\mathfrak{S}_n$ .

1. On suppose que  $\gamma$  et  $\gamma'$  commutent. Montrer que les supports de  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont soit égaux, soit disjoints.
2. Étudier la réciproque.