Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note U_n l'ensemble des parties de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$ ne contenant pas deux entiers successifs. On note u_n le cardinal de U_n.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre U_{n+2}, U_{n+1} et U_n. en déduire une relation entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

Exercice 2. Soit E un ensemble fini non vide. On note $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair et $\mathcal{P}_i(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair.

1. Trouver une bijection entre $\mathcal{P}_p(E)$ et $\mathcal{P}_i(E)$.
2. Conclusion ?

Exercice 3. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit

$$\mathcal{E} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B\}$$

En écrivant $\mathcal{E}$ comme une union finie judicieuse d'ensembles disjoints, calculer $|\mathcal{E}|$.

Exercice 4. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit

$$\mathcal{E} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cap B = \emptyset\}$$

Calculer $|\mathcal{E}|$.

Exercice 5. Soient m et n deux entiers non nuls. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Indication : une telle application est caractérisée par un ensemble de m entiers entre 1 et n.

Exercice 6. Même question en remplaçant « strictement croissantes » par croissantes. On pourra se ramener à ce qui précède en remarquant que si f est croissante, l'application g définie par $g(x) = f(x) + x - 1$ est strictement croissante.

Exercice 7. Soit n un entier naturel. Dénombrer astucieusement les parties à n éléments d'un ensemble de cardinal $2n$ et en déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice 8. Démontrer que l'application f de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + y$$

est une bijection.

Exercice 9. Pour tout ensemble fini E de cardinal n, on note B_n le nombre de partitions de E. Ce nombre est appelé le nombre de Bell d'indice n.

1. Calculer B_0, B_1, B_2, B_3.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

3. Que vaut B_6 ?

Exercice 10.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots \binom{n}{0} \\ \binom{0}{1} & \binom{1}{1} & \cdots \binom{n}{1} \\ \cdots & & \\ \binom{0}{n} & \binom{1}{n} & \cdots \binom{n}{n} \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}.

   Indication : On pourra considérer l'endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = P(X+1)$.

2. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$$

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$

Ce résultat s'appelle la formule d'inversion de Pascal.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit que σ est un *dérangement* lorsque pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(k) \neq k$. On note d_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$.

1. Calculer d_0, d_1, d_2, d_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$$

3. Déduire de la formule d'inversion de Pascal une formule explicite pour d_n.

Exercice 12. Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on note $\left[{n \atop k}\right]$ le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ possédant k orbites. Les entiers $\left[{n \atop k}\right]$ s'appellent les *coefficients de Stirling de première espèce.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que valent $\left[{n \atop 0}\right]$ et $\left[{n \atop n}\right]$?
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut $\left[{0 \atop k}\right]$?
3. Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $n < k$. Que vaut $\left[{n \atop k}\right]$?
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

5. Montrer que pour tous $n, k \geq 1$,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

6. Écrire une fonction Python calculant les coefficients de Stirling et donner dans un tableau les valeurs de $\left[{n \atop k}\right]$ pour $n, k \in [\![0, 10]\!]$.