Dans tout le TD, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. Sauf précisions particulières, les variables aléatoires X considérées sont définies sur Ω et vérifient que $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

Exercice 1. Une urne contient n boules, dont r sont rouges et $b = n - r$ sont blanches. On dispose d'un dé rouge parfait et d'un dé blanc pas parfait. Le 6 du dé blanc a une probabilité $\frac{1}{4}$ d'apparaître. Les autres faces du dé blanc ont la même probabilité d'apparition. On tire au hasard une boule dans l'urne et on lance le dé de la couleur correspondante. Soit X la valeur obtenue avec le dé lancé.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.
3. Quel univers pourrait-on choisir pour modéliser cette expérience ?

Exercice 2. Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in [0,1]$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi de $X+Y$?

Exercice 3. Soit $n \geq 1$. Soient $X, Y : \Omega \longrightarrow [\![1,n]\!]$ deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Soit $Z = \max(X,Y)$.

1. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(Z \leq k)$.
2. En déduire $\mathbb{P}(Z = k)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ ainsi qu'un équivalent de cette espérance lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(m, \frac{1}{2})$ et $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 5. On lance n ballons au hasard dans n paniers numérotés de 1 à n. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note X_i le nombre de ballons dans le panier i.

1. Déterminer la loi de X_i, son espérance, sa variance.
2. On pose $Y = X_1 + X_2$. Déterminer la loi de Y, son espérance, sa variance.
3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. M. Bienaymé laisse tomber 3600 dés parfaits. Soit X le nombre de 6.

1. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ? Sa variance ?
2. Selon M. Tchebychev, quel est un minorant de la probabilité p que X soit compris entre 550 et 650 ?
3. Donner une formule donnant la valeur exacte de p, puis calculer une valeur approchée de p à 10^{-3} près (utiliser Python, bien entendu).

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $Cov(X,Y) = 0$.
2. On suppose X et Y indépendantes. Déterminer les lois de $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
3. Déterminer la loi conjointe de U et V. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. Soit $p \in [0,1]$. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose $\lambda = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$.

1. Que vaut λ lorsque $X = Y$? Lorsque X et Y sont indépendantes ?
2. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
3. Montrer que $\max(0, 2p-1) \leq \lambda \leq p$.
4. Calculer $Cov(X,Y)$ en fonction de p et λ.

5. Toujours en fonction de p et λ, déterminer l'espérance et la variance de $X+Y$ et $X-Y$.

Exercice 9. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. On note G_X la fonction qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k)t^k$. Cette somme est en réalité finie puisque $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

1. Que vaut $G(1)$?
2. Calculer $G'(1)$ et $G''(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $G'(1)$ et $G''(1)$.
3. Calculer G_X lorsque X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Retrouver les valeurs bien connues de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 10. On dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue N fois l'expérience suivante : on tire une boule de l'urne. On note sa couleur, on la remet dans l'urne et on rajoute dans l'urne une boule *blanche* supplémentaire. Pour $k=1,\dots,N$, on note A_k l'événement « la $k$ième boule tirée est blanche ». Soit X le nombre de boules blanches tirées.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ pour $k=1,\dots,N$. Que vaut $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_k})$?
2. En déduire $\mathbb{E}(X)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X=0)$, $\mathbb{P}(X=1)$ et $\mathbb{P}(X=N)$.

Exercice 11. Même exercice que le précédent, mais à chaque étape on rajoute dans l'urne une boule *noire* supplémentaire. On donnera également un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 12. Soient $n, N \geq 1$. Soient $X_1,\dots,X_N$ N variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Soit $X = \max(X_1,\dots,X_N\}$.

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Que vaut $\mathbb{P}(X \leq k)$? En déduire $\mathbb{P}(X=k)$.
2. Montrer que
$$\mathbb{E}(X) = n - \frac{1}{n^N}\sum_{k=0}^{n-1} k^N$$
3. Reconnaître dans l'expression de $\mathbb{E}(X)/n$ une somme de Riemann et en déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 13. Soit $n \geq 1$. On munit l'univers $\Omega = \mathcal{P}_n([\![1,2n]\!])$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(A) = \max A$.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer l'espérance de X. On pourra admettre (ou montrer) que pour tous entiers n,p tels que $0 \leq n \leq p$, on a
$$\sum_{k=n}^{p}\binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$$
On remarquera que lorsque n tend vers l'infini, $\mathbb{E}(X) \sim 2n$.
4. Si vous êtes courageux, calculez $\mathbb{V}(X)$.

   On remarquera que lorsque n tend vers l'infini, $\mathbb{V}(X)$ tend vers 2.