Exercice 1. Soit $n \geq 2$. On munit $\Omega = [\![1, n]\!]$ de la probabilité $\mathbb{P}$ uniforme.

1. Pour tout diviseur p de n, on note A_p l'ensemble des éléments de Ω divisibles par p. Déterminer $\mathbb{P}(A_p)$.
2. Soient $p_1, \ldots, p_k$ les diviseurs premiers distincts de n. Montrer que les événements A_{p_i}, $i = 1, \ldots, k$ sont indépendants.
3. En déduire une formule donnant $\varphi(n)$, le cardinal de l'ensemble des éléments de Ω premiers avec n.

Exercice 2. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$.

1. On pose $\alpha = \mathbb{P}(A \cap B)$, $\beta = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$, $\gamma = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$ et $\delta = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$. Exprimer α, β, γ et δ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$. En déduire que
$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \alpha\delta - \beta\gamma$$
2. En remarquant que $\delta = 1 - \alpha - \beta - \gamma$, montrer que $\alpha\delta - \beta\gamma \leq \alpha(1 - \alpha)$ et en déduire que
$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4}$$
3. Le résultat de la question précédente est vrai quels que soient A et B. Appliquer ce résultat à $\overline{A}$ et B et montrer que
$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \geq -\frac{1}{4}$$
4. Quand a-t-on égalité dans les deux questions précédentes ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $f(x) = -x \ln x$. On convient abusivement d'écrire que $0 \ln 0 = 0$.

Soit $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini E de cardinal $N \geq 1$. L'*entropie* de X est le réel
$$H(X) = \sum_{x \in E} f(\mathbb{P}(X = x))$$

1. (a) Calculer $H(X)$ lorsque X est constante.
   (b) Calculer $H(X)$ lorsque X suit une loi uniforme.
   (c) Calculer $H(X)$ lorsque X suit une loi de Bernoulli.
2. (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq 1 - x$. Dans quel cas a-t-on égalité ?
   (b) En déduire que
   $$\sum_{x \in E} f(N\mathbb{P}(X = x))) \leq 0$$
   (c) En déduire une majoration de $H(X)$.
3. (a) Pour quelles variables aléatoires l'entropie est-elle minimale ?
   (b) Pour quelles variables aléatoires l'entropie est-elle maximale ?
4. Soient $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires à valeurs dans des ensembles finis E et F. Soit $Z = (X, Y) : \Omega \longrightarrow E \times F$. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors
$$H(Z) = H(X) + H(Y)$$
La réciproque est vraie, mais elle est plus difficile à prouver.

Exercice 4. Soient p et q deux entiers naturels non nuls tels que $p > q$.

1. On considère des *chemins* joignant des points de $\mathbb{N}^2$ et formés de déplacements successifs. Les seuls déplacements autorisés à partir du point (m, n) sont le passage de (m, n) à $(m+1, n)$ et le passage de (m, n) à $(m, n+1)$.

   On note Δ la droite d'équation $y = x$.

   (a) Pour $a, b, m, n \in \mathbb{N}$, combien y a-t-il de chemins différents allant de (a, b) à $(a+m, b+n)$?

   (b) Montrer, en utilisant une symétrie par rapport à la droite Δ, que le nombre de chemins allant de $(1, 0)$ à (p, q) et qui rencontrent la droite Δ est égal au nombre de chemins de $(0, 1)$ à (p, q).

   (c) En déduire que le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (p, q) qui ne rencontrent Δ qu'en $(0, 0)$ est
$$\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$$

2. Dans un scrutin il y a p bulletins pour le candidat A et q bulletins pour le candidat B. Calculer la probabilité que le candidat A soit toujours en tête lors du dépouillement.