

Les \mathbb{Q} -endomorphismes de \mathbb{R}

Marc Lorenzi

7 mars 2025

Résumé

Les endomorphismes du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R} sont bien connus : ce sont les homothéties. On s'intéresse dans cet article aux endomorphismes du \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} . Outre les homothéties, il existe des \mathbb{Q} -endomorphismes de \mathbb{R} discontinus en tout point. Leur graphe est dense dans le plan.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Description des endomorphismes	2
2.1	Introduction	2
2.2	Continuité	2
2.3	Existence d'endomorphismes de type 2	3
3	Le graphe des endomorphismes de type 2	5

1 Introduction

L'ensemble \mathbb{R} est muni de façon évidente d'une structure de \mathbb{Q} -espace vectoriel. Un résultat très général affirme que si E est un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} infini, alors

$$\text{card } E = \max(\dim_{\mathbb{K}} E, \text{card } \mathbb{K})$$

En prenant $E = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, on obtient

$$\text{card } \mathbb{R} = \max(\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, \text{card } \mathbb{Q})$$

et celui de \mathbb{Q} est

$$\text{card } \mathbb{Q} = \aleph_0$$

et celui de \mathbb{R} est

$$\text{card } \mathbb{R} = 2^{\aleph_0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{c}$$

On a donc

$$\mathfrak{c} = \max(\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, \aleph_0)$$

Par le théorème de Cantor, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ et donc

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathfrak{c}$$

Le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} est donc de dimension infinie non dénombrable. Notons au passage que le *cardinal* de \mathbb{R} est égal à sa *dimension* :

$$\text{card } \mathbb{R} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

2 Description des endomorphismes

2.1 Introduction

Définition 1. Un \mathbb{Q} -endomorphisme de \mathbb{R} est une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Exercice. Montrer que la première condition entraîne la deuxième. Les \mathbb{Q} -endomorphismes de \mathbb{R} sont donc les endomorphismes du *groupe* $(\mathbb{R}, +)$.

Notons $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des \mathbb{Q} -endomorphismes de \mathbb{R} . Que peut-on dire des éléments de cet ensemble ? Nous avons bien évidemment les applications de la forme $x \mapsto \mu x$ où $\mu \in \mathbb{R}$. Ces applications sont continues sur \mathbb{R} , ce sont en fait les \mathbb{R} -endomorphismes de \mathbb{R} , autrement dit les homothéties. Mais existe-t-il des \mathbb{Q} -endomorphismes discontinus ?

Nous allons voir qu'il y en a, et même beaucoup.

2.2 Continuité

Ce titre est mal placé. Il serait mieux à la page suivante.

Proposition 1. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continu en x . Alors, $f(x) = xf(1)$.

Démonstration. Par la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels telle que x_n tend vers x lorsque n tend vers l'infini. La fonction f est continue en x donc, par caractérisation séquentielle, $f(x_n)$ tend vers $f(x)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_n f(1)$, donc $f(x_n)$ tend aussi vers $xf(1)$. Par unicité de la limite, $f(x) = xf(1)$. \square

Proposition 2. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$. On suppose que f est continu en au moins un point. Alors, f est continu sur \mathbb{R} .

Démonstration. Supposons que f est continu en $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels qui tend vers y . Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui tend vers $x - y$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(y_n + q_n) = f(y_n) + f(q_n) = f(y_n) + q_n f(1)$$

Lorsque n tend vers l'infini, $y_n + q_n$ tend vers $y + (x - y) = x$. Comme f est continu en x , $f(y_n + q_n)$ tend vers $f(x) = xf(1)$. De plus, $q_n f(1)$ tend vers $(x - y)f(1)$. Ainsi, $f(y_n)$ tend vers

$$xf(1) - (x - y)f(1) = yf(1)$$

Ceci est vrai pour toute suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels qui tend vers y . Par caractérisation séquentielle, f a une limite en y (et cette limite est $yf(1)$). Ainsi, f est continue en y . \square

Proposition 3. Les \mathbb{Q} -endomorphismes de \mathbb{R} sont de deux types :

- Type 1 : les multiples de $\text{id}_{\mathbb{R}}$.
- Type 2 : les \mathbb{Q} -endomorphismes discontinus en tout point.

Démonstration. Soit f un \mathbb{Q} -endomorphisme de \mathbb{R} . Supposons que f n'est pas de type 2. L'endomorphisme f est donc continu en au moins un point. Par la proposition 2, f est continu sur \mathbb{R} . Par la proposition 1, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$. Ainsi, en posant $\mu = f(1)$, $f = \mu \text{id}_{\mathbb{R}}$ et donc f est de type 1. \square

Nous noterons

- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des \mathbb{Q} -endomorphismes de \mathbb{R} de type 1.
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des \mathbb{Q} -endomorphismes de \mathbb{R} de type 2.

On a donc la partition

$$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$$

2.3 Existence d'endomorphismes de type 2

Une question se pose : existe-t-il des \mathbb{Q} -endomorphismes de \mathbb{R} de type 2 ? La réponse est oui.

Proposition 4. $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Nous allons donner deux démonstrations de cette proposition. Voici tout d'abord une preuve « à la Cantor ¹ ».

Démonstration. L'application $\mu \mapsto \mu \text{id}_{\mathbb{R}}$ est une bijection de \mathbb{R} sur $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R})$. On a donc

$$\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}) = \text{card } \mathbb{R} = \mathfrak{c}$$

Soit \mathcal{B} une \mathbb{Q} -base de \mathbb{R} . Un endomorphisme de \mathbb{R} est caractérisé par la donnée des images des éléments de \mathcal{B} , c'est à dire par une application de \mathcal{B} vers \mathbb{R} . On en déduit que

$$\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \text{card } \mathbb{R}^{\mathcal{B}} = (\text{card } \mathbb{R})^{\text{card } \mathcal{B}} = \mathfrak{c}^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c} = \text{card } \mathbb{R}$$

Ainsi,

$$\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}) < \text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$$

Il existe donc des \mathbb{Q} -endomorphismes de type 2. On peut même dire mieux. Rappelons la partition

$$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$$

On a donc

$$\begin{aligned} \text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) &= \text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}) + \text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}) \\ &= \max(\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}), \text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

ou encore

$$2^{\mathfrak{c}} = \max(\mathfrak{c}, \text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}))$$

Par le théorème de Cantor, $\mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}$, donc

$$\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}) = 2^{\mathfrak{c}} \neq 0$$

□

Il y a donc *énormément* de \mathbb{Q} -endomorphismes de type 2, en fait autant que de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} !

Remarque. Le théorème dont nous avons parlé dans l'introduction nous dit que

$$\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \max(\dim \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}), \text{card } \mathbb{Q}) = \max(\dim \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}), \aleph_0) = \dim \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$$

Exercice. Vérifier les cardinaux et les dimensions des \mathbb{Q} -espaces vectoriels du tableau ci-dessous. Pourquoi y a-t-il un tiret pour la « dimension de $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$ » ?

Espace	Cardinal	Dimension
\mathbb{Q}	\aleph_0	1
\mathbb{R}	\mathfrak{c}	\mathfrak{c}
$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R})$	\mathfrak{c}	\mathfrak{c}
$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$	$2^{\mathfrak{c}}$	—
$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$	$2^{\mathfrak{c}}$	$2^{\mathfrak{c}}$

1. Pour montrer qu'un ensemble n'est pas vide, on montre que son cardinal est non nul. Cantor a prouvé de cette manière l'existence de nombres transcendants.

Donnons maintenant une preuve plus « constructive » de la proposition 4. Enfin, aussi constructive que faire se peut, parce qu'il est impossible de donner explicitement un seul \mathbb{Q} -endomorphisme de \mathbb{R} de type 2 : la construction ci-dessous va faire appel à une base du \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} et il s'avère que l'existence d'une telle base résulte de l'axiome du choix. En fait, l'axiome du choix est équivalent à « tous les espaces vectoriels possèdent une base ».

Démonstration. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que

$$a + b\sqrt{2} = 0$$

En supposant un court instant que $b \neq 0$, on obtient $\sqrt{2} = -a/b \in \mathbb{Q}$, contradiction. Ainsi, $b = 0$ puis, en reportant, $a = 0$. La famille $\mathcal{F} = (1, \sqrt{2})$ est donc une famille \mathbb{Q} -libre de \mathbb{R} . Complétons \mathcal{F} en une \mathbb{Q} -base \mathcal{B} de \mathbb{R} . Soit f le \mathbb{Q} -endomorphisme de \mathbb{R} défini par $f(1) = 1$, $f(\sqrt{2}) = -1$ et pour tout $e \in \mathcal{B}$ différent de 1 et $\sqrt{2}$, $f(e) = 0$. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f = \mu \text{id}_{\mathbb{R}}$. On a donc $f(1) = \mu \times 1 = \mu$, d'où $\mu = 1$. Mais aussi,

$$-1 = f(\sqrt{2}) = \mu\sqrt{2}$$

donc $\mu = -1/\sqrt{2}$. Contradiction. Ainsi, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$. \square

Remarque. On aurait pu bien entendu prendre pour $f(1)$ et $f(\sqrt{2})$ d'autres valeurs que 1 et -1 . La seule condition à respecter est $f(\sqrt{2}) \neq f(1)\sqrt{2}$.

Exercice.

1. Montrer que $\text{Im} f = \mathbb{Q}$.
2. Que vaut $\ker f$?
3. Montrer que $\ker f$ est dense dans \mathbb{R} .
4. Trouver les réels x non nuls et les rationnels λ tels que $f(x) = \lambda x$.

3 Le graphe des endomorphismes de type 2

Il s'avère que les \mathbb{Q} -endomorphismes de \mathbb{R} de type 2 sont *très très* irréguliers. La figure ci-dessous montre cinquante mille points du graphe de deux tels endomorphismes. On n'a tracé que des points appartenant au carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$. On a repris l'idée de la proposition 4 : dans le graphe de gauche, $f(1) = 1$ et $f(\sqrt{2}) = -1$. Dans celui de droite, $f(1) = 1$ et $f(\sqrt{2}) = 2$. En réalité les valeurs importent peu (voir remarque plus haut). Bien malin qui pourrait distinguer ces deux graphes.

Exercice. Écrire du code Python qui trace ce genre de graphe.

Proposition 5. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$. Le graphe de f est dense dans \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Le graphe de f est

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

Comme f est de type 2, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) \neq \alpha f(1)$. Posons

$$k = \alpha f(1) - f(\alpha)$$

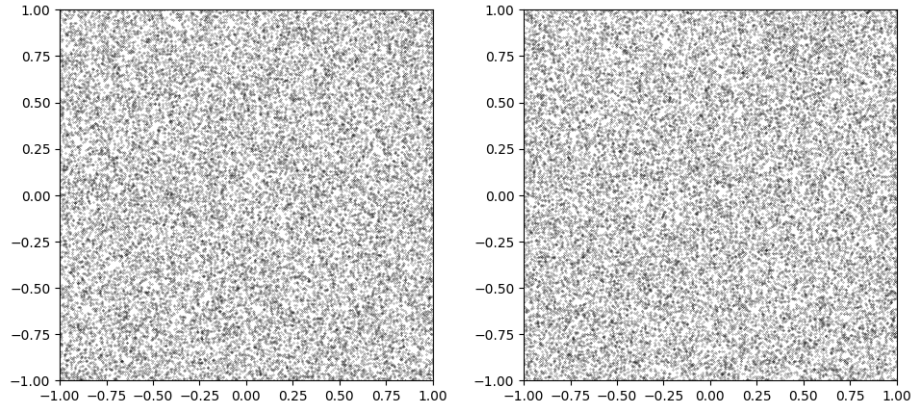


FIGURE 1 – Les graphes de deux fonctions de $\mathcal{L}^2_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$.

Montrons que tout point de \mathbb{R}^2 est la limite d'une suite de points de Γ . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de rationnels telles que

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{k}(xf(1) - y)$$

$$b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{k}(y\alpha - xf(\alpha))$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = a_n\alpha + b_n \quad \text{et} \quad y_n = f(x_n) = a_nf(\alpha) + b_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f(x_n)$ donc $(x_n, y_n) \in \Gamma$. Par les opérations sur les limites, on a facilement

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$$

Ainsi, (x_n, y_n) tend vers (x, y) lorsque n tend vers l'infini. \square