

Universalité

Proposition 1. *Pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, si f et g sont bornées alors $f + g$ est aussi bornée.*

Schéma : $\forall f \in E, \forall g \in E, P(f) \wedge P(g) \implies P(f + g).$

Démonstration. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons f et g bornées.

Comme f est bornée, il existe un réel M tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$$

De même, il existe un réel M' tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq M'$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + M'$$

En posant $M'' = M + M'$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|(f + g)(x)| \leq M''$$

Ainsi, la fonction $f + g$ est bornée. $\square$