Différence symétrique

Dans tout cet article, E désigne un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ une opération Δ en posant, pour tous $A, B \subset E$,

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Un élément x de E appartient à $A \,\Delta\, B$ si et seulement si x appartient à *un et un seul* des deux ensembles A et B.

1. Structure de groupe

1.1 Commutativité

Proposition. Δ *est commutative.*

Démonstration. C'est évident. $\square$

1.2 Neutre, inversibilité

Proposition. *Pour tout* $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \,\Delta\, \emptyset = A$ *et* $A \,\Delta\, A = \emptyset$.

Démonstration. Ici encore, c'est évident. $\emptyset$ est donc l'élément neutre pour l'opération Δ, et toute partie A de E possède un opposé pour Δ, qui est A elle-même. $\square$

1.3 Associativité

Proposition. Δ *est associative.*

Démonstration. Soient A, B, C trois parties de E. Soit $x \in E$. Notons $P(x)$ la propriété « $x \in (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$ » et $P'(x)$ la propriété « $x \in A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$ ». Faisons une table de vérité.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \Delta B$	$x \in B \Delta C$	$P(x)$	$P'(x)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1

On a donc $P(x) \iff P'(x)$, et donc $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$. Dorénavant, nous pourrons nous passer de parenthèses, et écrire plus simplement $A \Delta B \Delta C$. □

Proposition. *Soit $n \geq 2$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ n parties de E. Soit $x \in E$. Alors, $x \in A_1 \Delta \ldots \Delta A_n$ si et seulement si x appartient à un nombre impair des A_i.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur n.

- Pour $n = 2$, c'est clair : $x \in A_1 \Delta A_2$ si et seulement si x appartient à un et un seul des ensembles A_1 et A_2. Or, 1 est impair.
- Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vérifiée pour n. Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$ $n+1$ parties de E. Soit $x \in E$. On a

  $$A_1 \Delta \ldots \Delta A_{n+1} = (A_1 \Delta \ldots \Delta A_n) \Delta A_{n+1}$$

  x appartient à $A_1 \Delta \ldots \Delta A_{n+1}$ si et seulement si on est dans l'un des deux cas ci-dessous.

  Cas 1 : $x \in A_1 \Delta \ldots \Delta A_{n+1}$ et $x \notin A_{n+1}$. Dans ce cas, par l'hypothèse de récurrence, x appartient à un nombre impair d'ensembles parmi $A_1, \ldots, A_n$. Comme $x \notin A_{n+1}$, x appartient à un nombre impair d'ensembles parmi $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

  ou alors

  Cas 2 : $x \notin A_1 \Delta \ldots \Delta A_{n+1}$ et $x \in A_{n+1}$. Dans ce cas, toujours par l'hypothèse de récurrence, x appartient à un nombre pair d'ensembles parmi $A_1, \ldots, A_n$. Comme $x \in A_{n+1}$, x appartient à un nombre impair d'ensembles parmi $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

1.4 Bilan

Proposition. $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ *est un groupe abélien.*

2. Structure d'anneau

2.1 Distributivité

Proposition. $\cap$ *est distributive par rapport à* Δ.

Démonstration. Soient A, B, C trois parties de E. Soit $x \in E$. Notons $P(x)$ la propriété « $x \in A \cap (B \,\Delta\, C)$ » et $P'(x)$ la propriété « $x \in (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$ ». Faisons une table de vérité.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in B \,\Delta\, C$	$x \in A \cap B$	$x \in A \cap C$	$P(x)$	$P'(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0

On a donc $P(x) \iff P'(x)$, et donc $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$. $\square$

2.2 Autres propriétés d'anneau

Il est bien connu que $\cap$ est commutative et associative, et possède un élément neutre qui est E. En conclusion,

Proposition. $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ *est un anneau commutatif.*

Remarque. Ce n'est presque jamais un corps. En effet, soit $A \subset E$. A est inversible pour $\cap$ si et seulement si il existe $B \subset E$ tel que $A \cap B = E$. Mais $A \cap B \subset A$, une condition nécessaire d'inversibilité est donc $E \subset A$ et donc $A = E$. Inversement E est inversible pour $\cap$ puisque $E \cap E = E$. Ainsi, $\mathcal{P}(E)$ est un corps si et seulement si le seul élément non vide de $\mathcal{P}(E)$ est E, c'est à dire si et seulement si E possède un seul élément.

3. Une équation du premier degré

3.1 L'équation

Soient A et B deux parties de E. Considérons l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$

$$(\mathcal{E}) \quad (A \cap X) \Delta B = \emptyset$$

3.2 Résolution

Soit X une partie de E. X est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $(A \cap X) \Delta B = \emptyset$ ce qui équivaut encore, en « ajoutant » B des deux côtés de l'égalité, à $(A \cap X) \Delta B \Delta B = \emptyset \Delta B$, ou encore

$$(\mathcal{E}') \quad A \cap X = B$$

Remarquons tout d'abord que si $(\mathcal{E})$ a une solution, alors $B \subset A$. Nous supposons dorénavant cette inclusion vérifiée.

Soit X une solution de $(\mathcal{E})$. On a $A \cap X = B$, et donc $B \subset X$. Posons $X = B \cup C$, où $B \cap C = \emptyset$. Remplaçons dans $(\mathcal{E}')$. Il vient

$$B = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = B \cup (A \cap C)$$

Ainsi, $A \cap C \subset B$. Mais $B \cap C = \emptyset$, donc $A \cap C = \emptyset$. Résumons nous :

Si X est solution de $\mathcal{E}$ alors il existe $C \subset E \setminus A$ tel que $X = B \cup C$.

Inversement, soit $C \subset E \setminus A$. Soit $X = B \cup C$. On a

$$A \cap X = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = B \cup \emptyset = B$$

et donc X est solution de $(\mathcal{E})$.

3.3 Conclusion

- Si $B \not\subset A$, $(\mathcal{E})$ n'a pas de solution.
- Si $B \subset A$, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les parties X de E de la forme $X = B \cup C$, où $A \cap C = \emptyset$.