Moyennes

Récurrence simple, récurrence à deux termes, à trois termes, récurrence forte ... pour tous ces « principes » de récurrence, on a tendance à supposer une propriété vraie pour des entiers « petits » et à montrer qu'elle est encore vraie pour des entiers plus grands. Nous allons voir dans cet article un principe de récurrence qui n'obéit pas (enfin pas complètement) à ce schéma, puis nous utiliserons ce principe pour prouver une inégalité intéressante.

1. Un principe de récurrence bizarre

Commençons par quelques lemmes.

Lemme 1. Soit $A \subset [|2, \infty[|$. On suppose que pour tout $n \geq 3$, si $n \in A$ alors $n - 1 \in A$. On a alors

$$\forall n \geq 2, n \in A \implies [|2, n|] \subset A$$

Démonstration. On fait une récurrence simple sur n.

- Pour $n = 2$, la propriété est triviale.
- Soit $n \geq 3$. Supposons que $n \in A \implies [|2, n|] \subset A$. Supposons que $n + 1 \in A$. Alors, $n + 1 - 1 = n \in A$ et donc $[|2, n|] \subset A$. Comme $n + 1 \in A$, $[|2, n + 1|] \subset A$. □

Lemme 2. Soit $A \subset [|2, \infty[|$. On suppose que $2 \in A$ et, pour tout $n \geq 2$, si $n \in A$ alors $2n \in A$. On a alors

$$\forall k \geq 1, 2^k \in A$$

Démonstration. On fait une récurrence simple sur k.

- $2^1 = 2 \in A$.
- Soit $k \geq 1$. Supposons que $2^k \in A$. Comme $2^k \geq 2, 2 \times 2^k = 2^{k+1} \in A$. □

Lemme 3. Soit $A \subset [|2, \infty[|$. On suppose

- $2 \in A$
- Pour tout $n \geq 3, n \in A \implies n - 1 \in A$.
- Pour tout $n \geq 2, n \in A \implies 2n \in A$.

Alors $A = [|2, \infty[|$.

Démonstration. Soit $n \geq 2$. Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $n \leq 2^k$. Par le lemme 2, $2^k \in A$ puis, par le lemme 1, $[|2, 2^k|] \subset A$. Or, $n \in [|2, 2^k|]$. Donc $n \in A$. □

Voici notre principe de récurrence non standard.

Proposition [Principe de récurrence bizarre]. Soit $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier n. On suppose

- $P(2)$
- Pour tout $n \geq 3$, $P(n) \implies P(n-1)$.
- Pour tout $n \geq 2$, $P(n) \implies P(2n)$.

Alors, pour tout $n \geq 2$, $P(n)$.

Démonstration. Soit $A = \{n \geq 2, P(n)\}$. A vérifie les hypothèses du lemme 3, donc $A = [|2, +\infty[|$. □

Nous allons utiliser ce principe de récurrence pas très classique pour montrer une inégalité qui, elle, est très classique.

2. *Moyennes*

2.1 Qu'est-ce qu'une « moyenne » ?

Soient $a_1, \ldots, a_n$ n réels strictement positifs. La *moyenne arithmétique* de ces réels est le réel

$$\mu(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

On voit aisément que

$$\min\{a_1, \ldots, a_n\} \leq \mu(a_1, \ldots, a_n) \leq \max\{a_1, \ldots, a_n\}$$

On pourrait de façon plus générale appeler « moyenne » toute fonction μ vérifiant cette inégalité. Nous allons dans ce qui suit nous intéresser à un procédé permettant de fabriquer des fonctions de ce genre.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to E$ une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur une partie E de $\mathbb{R}$. Soit g la réciproque de f. La fonction g est elle aussi bijective et strictement croissante. Posons, pour tous $a_1, \ldots, a_n > 0$,

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = g(\mu(f(a_1), \ldots, f(a_n)))$$

Soit $k \in [|1, n|]$ tel que $a_k = \max\{a_1, \dots, a_n\}$. On a, par croissance de f,

$$f(a_k) = \max\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$$

et donc

$$\mu(f(a_1), \dots, f(a_n)) \leq f(a_k)$$

En composant par g, qui est croissante, il vient

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) \leq g(f(a_k)) = a_k$$

De même,

$$\min\{a_1, \dots, a_n\} \leq \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Ainsi, φ est une moyenne.

2.2 *Trois moyennes classiques*

Reprenons les notations du paragraphe précédent en choisissant des bijections f sympathiques.

- $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = x$ nous donne la moyenne arithmétique.
- $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln x$ est plus intéressante. On a dans ce cas

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a_1, \dots, a_n) & = & \exp(\frac{1}{n}(\ln a_1 + \dots + \ln a_n)) \\ & = & \exp(\frac{1}{n}\ln(a_1 \dots a_n)) \\ & = & \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \end{array}$$

  On obtient la *moyenne géométrique* de $a_1, \dots, a_n$. Nous la noterons

$$G(a_1, \dots, a_n)$$

- $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est également à noter. La fonction f est sa propre réciproque et on a

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a_1, \dots, a_n) & = & (\frac{1}{n}(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}))^{-1} \\ & = & \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \end{array}$$

  On obtient la *moyenne harmonique* de $a_1, \dots, a_n$. Nous la noterons

$$H(a_1, \dots, a_n)$$

Nous allons dans ce qui suit nous concentrer sur ces trois moyennes, et montrer que pour tous réels strictement positifs $a_1, \dots, a_n$,

$$H(a_1, \ldots, a_n) \leq G(a_1, \ldots, a_n) \leq \mu(a_1, \ldots, a_n)$$

2.3 Moyenne arithmétique et moyenne géométrique

Proposition 2. Soient $a_1, \ldots, a_n$ n réels strictement positifs. Alors

$$G(a_1, \ldots, a_n) \leq \mu(a_1, \ldots, a_n)$$

Démonstration. Montrons par récurrence bizarre sur n que pour tout $n \geq 2$,

$$(P(n)) \quad \forall a_1, \ldots, a_n > 0, a_1 \ldots a_n \leq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \right)^n$$

- $(P(2))$ Soient a_1, a_2 deux réels strictement positifs. On a

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 - a_1 a_2 = \frac{1}{4}(a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

- $(P(n) \implies P(n-1))$ Soit $n \geq 3$. Supposons $P(n)$. Soient $a_1, \ldots, a_{n-1}$ $n-1$ réels strictement positifs. Posons

$$A = \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$$

  et appliquons la propriété $P(n)$ aux n réels $a_1, \ldots, a_{n-1}, A$. Il vient

$$\begin{array}{rcl} a_1 \ldots a_{n-1} A & \leq & \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} + A}{n} \right)^n \\ & = & \left(\frac{(n-1)A + A}{n} \right)^n \\ & = & A^n \end{array}$$

  Divisons par A, qui est strictement positif :

$$a_1 \ldots a_{n-1} \leq A^{n-1}$$

  qui est la propriété $P(n-1)$.
- $(P(n) \implies P(2n))$ Soit $n \geq 2$. Supposons $P(n)$. Soient $a_1, \ldots, a_{2n}$ $2n$ réels strictement positifs. On a

$$\begin{array}{rcl} a_1 \ldots a_{2n} & = & (a_1 \ldots a_n)(a_{n+1} \ldots a_{2n}) \\ & \leq & \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \right)^n \left(\frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n} \right)^n \\ & = & \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n} \right)^n \end{array}$$

  Utilisons maintenant la propriété $P(2)$ avec $a = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ et $b = \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}$:

$$(ab)^n \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^{2n} = \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{2n}}{2n} \right)^{2n}$$

qui est la propriété $P(2n)$.

Ainsi, par le principe de récurrence bizarre, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 2$. $\square$

2.4 Moyenne géométrique et moyenne harmonique

Proposition. Soient $a_1, \ldots, a_n$ n réels strictement positifs. Alors

$$H(a_1, \ldots, a_n) \leq G(a_1, \ldots, a_n)$$

Démonstration. On applique le théorème du paragraphe précédent à $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$. Il vient

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

Un passage à l'inverse donne le résultat. $\square$