

Tronc de cône à bases parallèles de rayons R et R', de hauteur H, d'arête latérale a :

Aire latérale $S = \pi(R + R')a = 2\pi\rho a$, ρ rayon de la base médiane.

Aire totale : $S = \pi R(R + a) + \pi R'(R' + a)$;

Volume : $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + R'^2 \pm RR')$.

Aire engendrée par une ligne polygonale régulière tournant autour d'un axe situé dans son plan, passant par son centre et ne la traversant pas : $S = 2\pi R h$, R rayon du cercle inscrit, h projection de la ligne sur l'axe.

Volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan passant par un de ses sommets A et ne le traversant pas : $V = S_{(a)} \times \frac{ha}{3}$; S_a , aire engendrée par le côté a.

Volume engendré par un triangle d'aire S tournant autour du côté a : $V = \frac{4}{3}\pi \frac{S^2}{a}$.

Volume engendré par un secteur polygonal régulier :

$$V = S \times \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

4. Sphère de rayon R. — Aire de la zone de hauteur H : $S = 2\pi R H$.

Aire de la calotte : $S = 2\pi R H = \pi \overline{AB}^2$, AB corde de l'arc générateur.

Aire de la sphère : $S = 4\pi R^2 = \pi D^2$, D diamètre.

Volume du secteur sphérique : $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Volume de la sphère : $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$.

Volume de l'anneau sphérique (engendré par le segment AMB) : $V = \frac{1}{6}\pi \overline{AB}^2 \cdot ab$, ab projection de AB.

Volume du segment sphérique de hauteur H, rayons des bases : R et R', ρ rayon de la section médiane :

$$V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi H(R^2 + R'^2) = \pi \rho^2 H - \frac{\pi H^3}{12}.$$

Volume du segment à une base :

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right).$$

Aire d'un triangle sphérique d'angles A, B, C :

$$S = \frac{\pi R^2}{200}(A + B + C - 200) \text{ ou } \frac{\pi R^2}{180}(A' + B' + C' - 180).$$

Aire du fuseau sphérique d'angle α , $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{100}$ ou $\frac{\pi R^2 \alpha'}{90}$.

Volume de l'onglet sphérique d'angle α ,

$$V = \frac{\pi R^3}{3} \times \frac{\alpha}{100} \text{ ou } \frac{\pi R^3}{3} \times \frac{\alpha'}{90}.$$

A, B, C, α angles en grades; A', B', C', α' angles en degrés.

5. Théorèmes de Guldin. — Aire engendrée par une ligne plane de longueur L tournant autour d'un axe de son plan qui ne la traverse pas, $S = 2\pi RL$, R distance du centre de gravité de L à l'axe.

Volume engendré par une aire plane S tournant autour d'un axe de son plan ne la traversant pas : $V = 2\pi RS$, R distance du centre de gravité de S à l'axe de rotation.

TRIGONOMETRIE

1. Relation entre les mesures d'un même arc valant D degrés, G grades ou R radians :

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} \text{ (radian, arc égal au rayon, } 57^\circ 17' 45'' \text{ ou } 63^\circ, 6620).$$

2. Arcs correspondant à un sinus donné :

$$\sin x = a, |a| \leq 1.$$

Les tables de logarithmes donnent pour $\log |a|$ un arc α , compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et l'on a :

$$x = \alpha + 2k\pi \text{ et } x = (2k+1)\pi - \alpha, \text{ si } a > 0,$$

k nombre entier positif ou négatif.

$$x = -\alpha + 2k\pi \text{ et } x = (2k+1)\pi + \alpha, \text{ si } a < 0.$$

3. Arcs correspondant à un cosinus donné,

$$\cos x = a, |a| \leq 1,$$

$$x = \pm \alpha + 2k\pi, \text{ si } a > 0; x = \pm (\pi - \alpha) + 2k\pi, \text{ si } a < 0.$$

4. Arcs correspondant à une tangente donnée, $\operatorname{tg} x = a$

$$x = \alpha + k\pi, \text{ si } a > 0; x = -\alpha + k\pi, \text{ si } a < 0.$$

5. Relations entre les lignes trigonométriques d'un arc x :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

$$\operatorname{tg} x \cot x = 1$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$$

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \cos x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}};$$

$$\text{si } \operatorname{tg} x = \frac{m}{n}, \sin x = \frac{m}{\pm \sqrt{m^2 + n^2}}, \cos x = \frac{n}{\pm \sqrt{m^2 + n^2}}.$$

6. Relations entre les lignes trigonométriques des arcs

différant de π ou $\frac{\pi}{2}$:

$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$	$\cot(\pi + x) = \cot x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$	$\cot(\pi - x) = -\cot x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	$\cot(-x) = -\cot x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x$

7. Lignes trigonométriques de quelques arcs :

$\operatorname{tg} 45^\circ = \cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$	$\cot 45^\circ = \operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$
$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$
$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{tg} 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$

Les tableaux IV et V donnent la longueur des arcs et des lignes trigonométriques dans les 2 systèmes de division.

IV. — DIVISION CENTÉSIMALE
ARCS ET LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES NATURELLES

Grades	Arcs	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.		
0	0,0000	0,0000	0,0000	∞	1,0000	1,5708	100
0,5	0079	0079	0079	127,32	1,0000	5629	99,5
1	0157	0157	0157	63,657	0,9999	5551	99
1,5	0236	0236	0236	42,433	9997	5472	98,5
2	0,0314	0,0314	0,0314	31,821	0,9995	1,5394	98
2,5	0393	0393	0393	25,452	9992	5315	97,5
3	0471	0471	0472	21,205	9989	5237	97
3,5	0550	0550	0550	18,171	9985	5158	96,5
4	0,0628	0,0628	0,0629	15,895	0,9980	1,5080	96
4,5	0707	0706	0708	14,124	9975	5001	95,5
5	0785	0785	0787	12,706	9969	4923	95
5,5	0864	0863	0866	11,546	9963	4844	94,5
6	0,0942	0,0941	0,0945	10,579	0,9956	1,4765	94
6,5	1021	1019	1025	9,7601	9948	4687	93,5
7	1100	1097	1104	9,0579	9940	4608	93
7,5	1178	1175	1184	8,4490	9931	4530	92,5
8	0,1257	0,1253	0,1263	7,9158	0,9921	1,4451	92
8,5	1335	1331	1343	7,4451	9911	4373	91,5
9	1414	1409	1423	7,0264	9900	4294	91
9,5	1492	1487	1503	6,6514	9889	4216	90,5
10	0,1571	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	1,4137	90
10,5	1649	1642	1664	6,0080	9864	4059	89,5
11	1728	1719	1745	5,7297	9851	3980	89
11,5	1806	1797	1826	5,4755	9837	3902	88,5
12	0,1885	0,1874	0,1908	5,2422	0,9823	1,3823	88
12,5	1963	1951	0,1989	5,0273	9808	3744	87,5
13	2042	2028	2071	4,8288	9792	3666	87
13,5	2121	2105	2153	4,6448	9776	3587	86,5
14	0,2199	0,2181	0,2235	4,4737	0,9759	1,3509	86
14,5	2278	2258	2318	3443	9742	3430	85,5
15	2356	2334	2401	1653	9724	3352	85
15,5	2435	2411	2484	0257	9705	3273	84,5
16	0,2513	0,2487	0,2568	3,8947	0,9686	1,3195	84
16,5	2592	2563	2651	7715	9666	3116	83,5
17	2670	2639	2736	6554	9646	3038	83
17,5	2749	2714	2820	5457	9625	2959	82,5
18	0,2827	0,2790	0,2905	3,4420	0,9603	1,2881	82
18,5	2906	2865	2991	3438	9581	2802	81,5
19	2985	2940	3076	2506	9558	2723	81
19,5	3063	3015	3163	1620	9535	2645	80,5
20	0,3142	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	1,2566	80
20,5	3220	3165	3336	2,9974	9486	2488	79,5
21	3299	3239	3424	9208	9461	2409	79
21,5	3377	3313	3512	8476	9435	2331	78,5
22	0,3456	0,3387	0,3600	2,7776	0,9409	1,2252	78
22,5	3534	3461	3689	7106	9382	2174	77,5
23	3613	3535	3779	6464	9354	2095	77
23,5	3691	3608	3869	5848	9326	2017	76,5
24	0,3770	0,3681	0,3959	2,5257	0,9298	1,1938	76
24,5	3848	3754	4050	4689	9269	1860	75,5
25	0,3927	0,3827	0,4142	2,4142	0,9239	1,1781	75
		Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	Arcs	Grades

DIVISION CENTÉSIMALE
ARCS ET LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES NATURELLES

Grades	Arcs	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.		
25	0,3927	0,3827	0,4142	2,4142	0,9239	1,1781	75
25,5	4006	3899	4234	3616	9208	1702	74,5
26	4084	3971	4327	3109	9178	1624	74
26,5	4163	4043	4421	2620	9146	1545	73,5
27	0,4241	0,4115	0,4515	2,2148	0,9114	1,1467	73
27,5	4320	4187	4610	1692	9081	1388	72,5
28	4398	4258	4706	1251	9048	1310	72
28,5	4477	4329	4802	0825	9015	1231	71,5
29	0,4555	0,4399	0,4899	2,0443	0,8980	1,1153	71
29,5	4634	4470	4997	2,0013	8945	1074	70,5
30	4712	4540	5095	1,9626	8910	0996	70
30,5	4791	4610	5195	9251	8874	0917	69,5
31	0,4869	0,4679	0,5295	1,8887	0,8838	1,0838	69
31,5	4948	4749	5396	8533	8801	0760	68,5
32	5027	4818	5498	8190	8763	0681	68
32,5	5105	4886	5600	7856	8725	0603	67,5
33	0,5184	0,4955	0,5704	1,7532	0,8686	1,0524	67
33,5	5262	5023	5808	7216	8647	0446	66,5
34	5341	5090	5944	6909	8607	0367	66
34,5	5419	5158	6020	6610	8567	0289	65,5
35	0,5498	0,5225	0,6128	1,6319	0,8526	1,0210	65
35,5	5576	5292	6237	6034	8485	0132	64,5
36	5655	5358	6346	5757	8443	1,0053	64
36,5	5733	5424	6457	5487	8401	0,9975	63,5
37	0,5812	0,5490	0,6569	1,5224	0,8358	0,9896	63
37,5	5890	5556	6682	4966	8315	9817	62,5
38	5969	5621	6796	4715	8271	9739	62
38,5	6048	5686	6911	4469	8226	9660	61,5
39	0,6126	0,5750	0,7028	1,4229	0,8181	0,9582	61
39,5	6205	5814	7146	3994	8136	9503	60,5
40	6283	5878	7265	3764	8090	9425	60
40,5	6362	5941	7386	3539	8044	9346	59,5
41	0,6440	0,6004	0,7508	1,3319	0,7997	0,9268	59
41,5	6519	6067	7632	3103	7949	9189	58,5
42	6597	6129	7757	2892	7902	9111	58
42,5	6676	6191	7883	2685	7853	9032	57,5
43	0,6754	0,6252	0,8012	1,2482	0,7804	0,8954	57
43,5	6833	6314	8141	2283	7755	8875	56,5
44	6912	6374	8273	2088	7705	8796	56
44,5	6990	6435	8406	1896	7655	8718	55,5
45	0,7069	0,6494	0,8541	1,1708	0,7604	0,8639	55
45,5	7147	6554	8678	1524	7553	8561	54,5
46	7226	6613	8816	1343	7501	8482	54
46,5	7304	6672	8957	1165	7449	8404	53,5
47	0,7383	0,6730	0,9099	1,0990	0,7396	0,8325	53
47,5	7461	6788	9244	0818	7343	8247	52,5
48	7540	6845	9391	0649	7290	8168	52
48,5	7618	6903	9540	0483	7236	8090	51,5
49	0,7697	0,6959	0,9691	1,0319	0,7181	0,8011	51
49,5	7775	7015	0,9844	0158	7126	7933	50,5
50	0,7854	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	0,7854	50
		Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	Arcs	Grades

V. — DIVISION SEXAGÉSIMALE
ARCS ET LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES NATURELLES

Degrés	Minutes	Arcs	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.			
0		0,0000	0,0000	0,0000	∞	1,0000	1,5708	90	
0	30	0087	0087	0087	114,59	1,0000	5621	89	30
1		0175	0175	0175	57,290	0,9998	5533	89	
1	30	0262	0262	0262	38,188	0,9997	5446	88	30
2		0,0349	0,0349	0,0349	28,636	0,9994	1,5359	88	
2	30	0436	0436	0437	22,904	0,9990	5272	87	30
3		0524	0523	0524	19,081	0,9986	5184	87	
3	30	0611	0610	0612	16,350	0,9981	5097	86	30
4		0,0698	0,0698	0,0699	14,301	0,9976	1,5010	86	
4	30	0785	0785	0787	12,706	0,9969	4923	85	30
5		0873	0872	0875	11,430	0,9962	4835	85	
5	30	0960	0958	0963	10,385	0,9954	4748	84	30
6		0,1047	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	1,4661	84	
6	30	1134	1132	1139	8,7769	0,9936	4573	83	30
7		1222	1219	1228	8,1443	0,9925	4486	83	
7	30	1309	1305	1317	7,5958	0,9914	4399	82	30
8		0,1396	0,1392	0,1405	7,1154	0,9903	1,4312	82	
8	30	1484	1478	1495	6,6912	0,9890	4224	81	30
9		1571	1564	1584	6,3138	0,9877	4137	81	
9	30	1658	1650	1673	5,9758	0,9863	4050	80	30
10		0,1745	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	1,3963	80	
10	30	1833	1822	1853	5,3955	0,9833	3875	79	30
11		1920	1908	1944	5,1446	0,9816	3788	79	
11	30	2007	1994	2035	4,9152	0,9799	3701	78	30
12		0,2094	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	1,3614	78	
12	30	2182	2164	2217	5,107	0,9763	3526	77	30
13		2269	2250	2309	3315	0,9744	3439	77	
13	30	2356	2334	2401	1653	0,9724	3352	76	30
14		0,2443	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	1,3265	76	
14	30	2531	2504	2586	3,8667	0,9681	3177	75	30
15		2618	2588	2679	7321	0,9659	3090	75	
15	30	2705	2672	2773	6059	0,9636	3003	74	30
16		0,2793	0,2756	0,2867	3,4874	0,9613	1,2915	74	
16	30	2880	2840	2962	3759	0,9588	2828	73	30
17		2967	2924	3057	2709	0,9563	2741	73	
17	30	3054	3007	3153	1716	0,9537	2654	72	30
18		0,3142	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	1,2566	72	
18	30	3239	3173	3346	2,9887	0,9483	2479	71	30
19		3316	3256	3443	9042	0,9455	2392	71	
19	30	3403	3338	3541	8239	0,9426	2305	70	30
20		0,3491	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	1,2217	70	
20	30	3578	3502	3739	6746	0,9367	2130	69	30
21		3665	3584	3839	6051	0,9336	2043	69	
21	30	3752	3665	3939	5386	0,9304	1956	68	30
22		0,3840	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	1,1868	68	
22	30	0,3927	0,3827	0,4142	2,4142	0,9239	1,1781	67	30
			Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	Arcs	Degrés	Minutes

DIVISION SEXAGÉSIMALE
ARCS ET LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES NATURELLES

Degrés	Minutes	Arcs	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.			
23		0,4014	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	1,1694	67	
23	30	4102	3987	4348	2998	9171	1606	66	30
24		4189	4067	4452	2460	9135	1519	66	
24	30	4276	4147	4557	1943	9100	1432	65	30
25		0,4363	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	1,1345	65	
25	30	4451	4305	4770	0965	9026	1257	64	30
26		4538	4384	4877	0503	8988	1170	64	
26	30	4625	4462	4986	2,0057	8949	1083	63	30
27		0,4712	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	1,0996	63	
27	30	4800	4617	5206	9210	8870	0908	62	30
28		4887	4695	5317	8807	8829	0811	62	
28	30	4974	4772	5430	8418	8788	0734	61	30
29		0,5061	0,4848	0,5543	1,8040	0,8746	1,0647	61	
29	30	5149	4924	5658	7675	8704	0559	60	30
30		5236	5000	5774	7321	8660	0472	60	
30	30	5323	5075	5890	6977	8616	0385	59	30
31		0,5411	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	1,0297	59	
31	30	5498	5225	6128	6319	8526	0210	58	30
32		5585	5299	6249	6003	8480	0123	58	
32	30	5672	5373	6371	5697	8434	1,0036	57	30
33		0,5760	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	0,9948	57	
33	30	5847	5519	6619	5108	8339	9861	56	30
34		5934	5592	6745	4826	8290	9774	56	
34	30	6021	5664	6873	4550	8241	9687	55	30
35		0,6109	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	0,9599	55	
35	30	6196	5807	7133	4019	8141	9512	54	30
36		6283	5878	7265	3764	8090	9425	54	
36	30	6370	5948	7400	3514	8039	9338	53	30
37		0,6458	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	0,9250	53	
37	30	6545	6088	7673	3032	7934	9163	52	30
38		6632	6157	7813	2799	7880	9076	52	
38	30	6720	6225	7954	2572	7826	8988	51	30
39		0,6807	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	0,8901	51	
39	30	6894	6361	8243	2131	7716	8814	50	30
40		6981	6428	8391	1918	7660	8727	50	
40	30	7069	6494	8541	1708	7604	8639	49	30
41		0,7156	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	0,8552	49	
41	30	7243	6626	8847	1303	7490	8465	48	30
42		7330	6691	9004	1106	7431	8378	48	
42	30	7418	6756	9163	0913	7373	8290	47	30
43		0,7505	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	0,8203	47	
43	30	7592	6884	9490	0538	7254	8116	46	30
44		7679	6947	9657	0355	7193	8029	46	
44	30	7767	7009	9827	0176	7133	7941	45	30
45		0,7854	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	0,7854	45	
			Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	Arcs	Degrés	Minutes

8. Addition et soustraction des arcs :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}, \quad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}, \\ \cot(a+b) &= \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}, \quad \cot(a-b) = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a}.\end{aligned}$$

9. Multiplication des arcs : $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$,

$$\begin{aligned}\sin 3a &= 3 \sin a - 4 \sin^3 a = \sin a (4 \cos^2 a - 1), \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a, \\ \cos 3a &= 4 \cos^3 a - 3 \cos a = \cos a (4 \cos^2 a - 3), \\ \operatorname{tg} 2a &= \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}, \quad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a} = \frac{\cot a - \operatorname{tg} a}{2},\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}, \quad \cot 3a = \frac{\cot^3 a - 3 \cot a}{3 \cot^2 a - 1}.$$

$$\begin{aligned}\sin ma &= C_m^1 \sin a \cos^{m-1} a - C_m^3 \sin^3 a \cos^{m-3} a \\ &\quad + C_m^5 \sin^5 a \cos^{m-5} a - \dots \\ C_m^n &= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n},\end{aligned}$$

$$\cos ma = \cos^m a - C_m^2 \cos^{m-2} a \sin^2 a + C_m^4 \cos^{m-4} a \sin^4 a - \dots$$

$$\operatorname{tg} ma = \frac{C_m^1 \operatorname{tg} a - C_m^3 \operatorname{tg}^3 a + C_m^5 \operatorname{tg}^5 a - \dots}{1 - C_m^2 \operatorname{tg}^2 a + C_m^4 \operatorname{tg}^4 a - \dots}$$

$$\begin{aligned}\sin(m+1)a &= 2 \cos a \sin ma - \sin(m-1)a; \\ \cos(m+1)a &= 2 \cos a \cos ma - \cos(m-1)a.\end{aligned}$$

10. Division des arcs : $\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$,

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

$$\sin \frac{a}{2} = \frac{\pm \sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}}{2},$$

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{\pm \sqrt{1 + \sin a} \mp \sqrt{1 - \sin a}}{2}.$$

$\sin a$ étant donné, $a = \alpha + 2k\pi$ et l'on a pour $\sin \frac{a}{3}$ les 3 valeurs :

$$\sin \frac{\alpha}{3}, \quad \sin \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3} \right), \quad \sin \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3} \right).$$

Il en est de même pour $\cos \frac{a}{3}$ et $\operatorname{tg} \frac{a}{3}$.

11. Lignes trigonométriques de l'arc a en fonction de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$:

$$\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}, \quad \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

12. Transformation de sommes en produits :

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$$

$$\cos b - \cos a = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2},$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}; \quad \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b};$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}; \quad \cot b - \cot a = \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b}.$$

$$\sin a + \cos b = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2} \right)$$

$$\sin a - \cos b = -2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{2} \right)$$

$$\cos a + \sin b = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2} \right)$$

$$\cos a - \sin b = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{2} \right)$$

$$\operatorname{tg} a + \cot b = \frac{\cos(a-b)}{\cos a \sin b}; \quad \operatorname{tg} a - \cot b = \frac{-\cos(a+b)}{\cos a \sin b}.$$

$$1 + \sin a = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$$

$$1 - \sin a = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right)$$

$$\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right)} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$$

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}, \quad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}, \quad \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2},$$

$$1 \pm \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} \pm a \right)}{\cos a}, \quad 1 \pm \cot a = \frac{\sqrt{2} \sin \left(a \pm \frac{\pi}{4} \right)}{\sin a}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}; \quad \frac{\cos a + \cos b}{\cos b - \cos a} = \cot \frac{a+b}{2} \cot \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a \pm \sin a = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} \pm a \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} \mp a \right)$$

$$\frac{\sin a \pm \sin b}{\cos b \pm \cos a} = \frac{\cos b - \cos a}{\sin a \mp \sin b} = \operatorname{tg} \frac{a \pm b}{2}; \quad \frac{\cos a + \sin a}{-\cos a - \sin a}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + a \right) = \cot \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = \sqrt{\frac{1 + \sin 2a}{1 - \sin 2a}}$$

$$\begin{aligned}\sin^2 a - \sin^2 b &= \cos^2 b - \cos^2 a = \sin(a+b) \sin(a-b); \\ \cos^2 a - \sin^2 b &= \cos^2 b - \sin^2 a = \cos(a+b) \cos(a-b)\end{aligned}$$

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

$$\sin b \cos a = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$$

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\cos(a-b) + \cos(a+b)}$$

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)}$$

Si $A + B + C = \pi$, on a :

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C;$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2};$$

$$1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C = 2 \cos A \cos B \cos C;$$

$$\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = 2 \sin B \sin C \cos A.$$

13. Expressions à rendre calculables par logarithmes

1° a, b , on pose $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}^2 \varphi$, $a + b = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$.

2° $a - b, a > b$, on pose $\frac{b}{a} = \sin^2 \varphi$, $a - b = a \cos^2 \varphi$.

3° $\frac{a-b}{a+b}, a > b$, $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right)$,

ou bien : $\frac{b}{a} = \cos \varphi$, $\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$.

4° $\sqrt{a^2 + b^2}, \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\cos \varphi}$.

5° $\sqrt{a^2 - b^2}, \frac{b}{a} = \sin \varphi$, $\sqrt{a^2 - b^2} = a \cos \varphi$.

14. Équations. — 1° $a \sin x + b \cos x = c$, on pose $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$,

d'où : $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi$, avec la condition : $c^2 \leq a^2 + b^2$.

2° $a \operatorname{tg} x + b \cot x = c$ se ramène à :
 $c \sin 2x + (a - b) \cos 2x = a + b$, d'où, en posant :

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a-b}{c}$, on a : $\sin(2x + \varphi) = \frac{a+b}{c} \cos \varphi$, $4ab \leq c^2$.

3° $ax^2 + bx + c = 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$,

$$x = \frac{-b}{2a} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} \right].$$

Si $\frac{c}{a} > 0$, on pose $\frac{4ac}{b^2} = \sin^2 \varphi$, $x = \frac{-b}{2a} (1 \pm \cos \varphi)$,

$$x' = \frac{-b}{a} \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \pm \sqrt{\frac{c}{a}} \cot \frac{\varphi}{2}, \quad x'' = \frac{-b}{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \pm \sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Si $\frac{c}{a} < 0$, on pose $\frac{4ac}{b^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi$, $x = \frac{-b}{2a} \left(1 \pm \frac{1}{\cos \varphi} \right)$,

$$x' = \frac{-b}{a \cos \varphi} \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}} \cot \frac{\varphi}{2},$$

$$x'' = \frac{-b}{a \cos \varphi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

4° $x^3 + px \pm q = 0$. Il n'y a qu'une racine $x = y + z$, y^3 et z^3 étant les racines de $X^3 \pm qX - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, ce qui ramène à 3°.

5° $x^3 - px \pm q = 0$, si $\left(\frac{p}{3}\right)^3 < \left(\frac{q}{2}\right)^2$, une seule racine

$x = y + z$, y^3 et z^3 étant les racines de $X^3 \pm qX + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$.

Si $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$, on pose $K = \sqrt{\frac{4p}{3}}$ et $\cos \alpha = \frac{3q}{Kp}$, les

3 racines sont $K \cos \frac{\alpha}{3}$, $K \cos \frac{\alpha + 2\pi}{3}$, $K \cos \frac{\alpha + 4\pi}{3}$.

Si $\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{q}{2}\right)^2$, $K = \sqrt{\frac{4p}{3}}$, $\cos \alpha = 1$, $\alpha = 2\pi$ ou 0, l'une

des racines est $K = \sqrt{\frac{4p}{3}}$, les deux autres sont égales à

$$K \cos \frac{2\pi}{3}$$

15. Limites. Dérivées. Séries.

Limite $\frac{\sin x}{x} = 1$ et limite $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ lorsque x tend vers 0;

$$x - \frac{x^5}{6} < \sin x < x \text{ et } 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x'^2}{2} + \frac{x''}{24}$$

pour x très petit.

Dérivées.

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x \quad \left| \quad y = \arcsin x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right.$$

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x \quad \left| \quad y = \arccos x, \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right.$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left| \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2} \right.$$

$$y = \cot x, \quad y' = \frac{-1}{\sin^2 x} \quad \left| \quad y = \operatorname{arccot} x, \quad y' = \frac{-1}{1+x^2} \right.$$

$$y = \sin u, \quad y' = u' \cos u \quad \left| \quad y = \cos u, \quad y' = -u' \sin u, \text{ etc.} \right.$$

Développements en série :

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots;$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

16. Résolution des triangles rectangles.

Formules : $b = a \sin B = a \cos C$; $b = c \operatorname{tg} B = c \cot C$.

	Données.	Formules.
I	a, B	$C = \frac{\pi}{2} - B$, $b = a \sin B$, $c = a \cos B$, $S = \frac{a^2 \sin 2B}{4}$.
II	b, B	$C = \frac{\pi}{2} - B$, $a = \frac{b}{\sin B}$, $c = b \cot B$, $S = \frac{b^2 \cot B}{2}$.
III	a, b	$\sin B = \cos C = \frac{b}{a}$, $c = a \sin C$, ou $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, $c = \sqrt{(a-b)(a+b)}$, $S = \frac{b c}{2}$.
IV	b, c	$\operatorname{tg} B = \cot C = \frac{b}{c}$, $a = \frac{b}{\sin B}$, $S = \frac{b c}{2}$.

17. Triangles quelconques. Formules :

$$\text{I} \begin{cases} A + B + C = \pi \\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = c \cos A + a \cos C \\ c = a \cos B + b \cos A \end{cases}$$

Soient $2p$ le périmètre du triangle, S la surface, R, r, r' , r'' , r''' les rayons du cercle circonscrit, du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits, h, m, α et α' la hauteur, la médiane et les bissectrices issues du sommet A , on a les relations :

$$\frac{a}{\sin A} = 2R; \quad a^2 = (b+c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2} = (b-c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{A}{2};$$

$$\frac{\sin(B-C)}{\sin A} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}; \quad S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

$$S = pr = (p-a)r' = (p-r)r'' = (p-c)r'''$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{rr'r''r'''} = \frac{abc}{4R}$$

$$S = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = r^2 \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = r'^2 \cot \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

$$S = rr' \cot \frac{A}{2} = r'' r''' \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b};$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

$$a = \frac{p \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{r \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r' \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$a = 2R \sin A = \sqrt{\frac{2S \sin A}{\sin B \sin C}};$$

$$R = \frac{p}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{p-a}{4 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}}$$

$$r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$r = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (p-b) \cot \frac{C}{2} = (p-c) \cot \frac{B}{2} = \frac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$r' = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = r \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.$$

$$h = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A} = \frac{2p \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = 2R \sin B \sin C$$

$$h = \frac{2r \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{2r' \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$\alpha = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}, \quad \alpha' = \frac{2bc}{b-c} \sin \frac{A}{2}, \quad \frac{\alpha}{\alpha'} = \operatorname{tg} \frac{B-C}{2}.$$

$\hat{M}$ étant l'angle de la médiane m avec BC on a :
 $2 \cot M = \cot B - \cot C$ (on suppose $C > B$)

$$\sin(C-B) = \frac{h \cot M}{R}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{4am \sin M}{4m^2 - a^2} = \frac{4ah}{4m^2 - a^2}.$$

Résolution des triangles quelconques :

Données.	Formules.
I a, B, C	$A = \pi - (B + C), \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$ $S = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$
II a, b, C	$A + B = \pi - C, \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2},$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \quad S = \frac{ab \sin C}{2};$

Données.

Formules.

$$\text{ou : } c = \frac{(a-b) \sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} = \frac{(a+b) \cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}},$$

$$\text{ou : } c^2 = (a+b)^2 \sin^2 \varphi,$$

$$\text{en posant : } \cos^2 \varphi = \frac{4ab \cos^2 \frac{C}{2}}{(a+b)^2}.$$

III a, b, A

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}, \quad C = \pi - (A + B),$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \quad S = \frac{ab \sin C}{2}.$$

Discussion : $A \geq \frac{\pi}{2} \begin{cases} a \leq b, \text{ 0 solution.} \\ a > b, \text{ 1 sol. } B < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

$A < \frac{\pi}{2} \begin{cases} a > b, \text{ 1 sol. } B < \frac{\pi}{2} \\ a < b \begin{cases} a < b \sin A, \text{ 0 sol.} \\ a = b \sin A, \text{ 1 sol. } B = \frac{\pi}{2} \\ a > b \sin A, \text{ 2 sol. } B' \text{ et } B'' = \pi - B'. \end{cases} \end{cases}$

IV a, b, c

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b},$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}, \quad S = pr.$$

18. **Quadrilatère inscriptible.** — Notations : a, b, c, d , les côtés; $2p$, le périmètre; A , angle de d et a ; B , angle de a et b , etc.; S , la surface et α l'angle des diagonales :

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}},$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \quad \sin \alpha = \frac{2S}{ac+bd}.$$

19. **Triangles sphériques.** — Notations : a, b, c , les côtés; A, B, C , les angles; $2p = a + b + c$, le périmètre; $2E = A + B + C - \Pi$, l'excès sphérique; R et r , rayons sphériques du cercle circonscrit et du cercle inscrit.

Formules générales :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad (\text{et 2 form. analogues}),$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A, \quad (\text{et 5 formules analogues}),$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}},$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin E \sin(A-E)}{\sin B \sin C}}, \quad \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B-E) \sin(C-E)}{\sin B \sin C}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin E \sin(A-E)}{\sin(B-E) \sin(C-E)}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}},$$

$$\operatorname{tg} R = \sqrt{\frac{\sin E}{\sin(A-E) \sin(B-E) \sin(C-E)}},$$

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin p \sin p}}.$$

Formules de Delambre :

$$\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$\sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2},$$

$$\cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Analogies de Néper :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \times \cot \frac{C}{2}, & \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} &= \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \times \operatorname{tg} \frac{c}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \times \cot \frac{C}{2}, & \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} &= \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} \times \operatorname{tg} \frac{c}{2}. \end{aligned} \right\}$$

Résolution des triangles sphériques.

TRIANGLES RECTANGLES : $A = \frac{\pi}{2}$.

Données.	Formules.
I a, b	$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$; $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$; $\cos C = \operatorname{tg} b \cdot \cot a$.
II a, B	$\sin b = \sin a \sin B$; $\operatorname{tg} c = \frac{\cos B}{\cot a}$; $\cot C = \frac{\cos a}{\cot B}$.
III b, c	$\cos a = \cos b \cos c$; $\cot B = \sin c \cot b$; $\cot C = \sin b \cot c$.
IV b, B	$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$; $\sin C = \frac{\cos B}{\cos b}$; $\sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}$.
V b, C	$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C}$; $\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C$; $\cos B = \cos b \sin C$.
VI B, C	$\cos a = \cot B \cot C$; $\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$; $\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$.

TRIANGLES RECTILATÈRES : $a = \frac{\pi}{2}$.

Données.	Formules.
I A, B	$\cos C = -\frac{\cos A}{\cos B}$; $\sin b = \frac{\sin B}{\sin A}$; $\cos c = -\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}$.
II A, b	$\sin B = \sin b \sin A$; $\operatorname{tg} C = -\operatorname{tg} A \cos B$; $\cot c = -\operatorname{tg} b \cos A$.
III B, C	$\cos A = -\cos B \cos C$; $\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} B}{\sin C}$; $\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} C}{\sin B}$.
IV B, b	$\sin A = \frac{\sin B}{\sin b}$; $\sin C = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} b}$; $\sin c = \frac{\cos b}{\cos B}$.
V B, c	$\operatorname{tg} A = -\frac{\operatorname{tg} B}{\cos c}$; $\operatorname{tg} C = \sin B \operatorname{tg} c$; $\cos b = \sin c \cos B$.
VI b, c	$\cos A = -\cot b \cot c$; $\cos B = \frac{\cos b}{\sin c}$; $\cos C = \frac{\cos c}{\sin b}$.

TRIANGLES QUELCONQUES.

Données.	Formules.
I a, b, c	on a $\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p}}$ et $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{tg} r}{\sin(p-a)}$; $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\operatorname{tg} r}{\sin(p-b)}$; $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tg} r}{\sin(p-c)}$.
II A, B, C	on a $\operatorname{tg} R = \sqrt{\frac{\sin E}{\sin(A-E) \sin(B-E) \sin(C-E)}}$ et $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \operatorname{tg} R \sin(A-E)$; $\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \operatorname{tg} R \sin(B-E)$; $\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} R \sin(C-E)$.
III a, b, C	on calcule A et B par les formules : $\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}$ et $\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}$; puis c par la formule : $\sin \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}}$.
IV A, B, c	on calcule a et b par les formules : $\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}}$ et $\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}$; puis C par la formule : $\sin \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{c}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}$.
V a, b, A	$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$; $\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \cdot \sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}}$; $\cot \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}}$.
VI A, B, a	$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$; $\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \cdot \sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}}$; $\cot \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}}$.

Longueur des côtés et surface d'un triangle sphérique. — Le côté a étant exprimé en secondes, sa longueur en mètres sera : $aR \sin 1''$ et le triangle aura pour surface $S = 2R^2 E \sin 1''$, R étant le rayon de la sphère ($\text{arc } 1'' = \sin 1'' = 0,0000048$, $\log \sin 1'' = 6,68557$; dans la division centésimale, $\text{arc } 1'' = \sin 1'' = 0,0000016$, $\log \sin 1'' = 6,19612$).

Réduction d'un angle à l'horizon. — Si les côtés d'un angle V font avec la verticale des angles α et β , la projection horizontale V' de V est donnée par :

$$\text{tg } \frac{V'}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-\alpha) \sin(p-\beta)}{\sin p \sin(p-V)}}, \text{ où } 2p = \alpha + \beta + V.$$

Volume d'un parallélépipède connaissant 3 arêtes contiguës, l, m, n , et les angles a, b, c , qu'elles font entre elles :
 $V = 2lmn \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}.$

MÉCANIQUE

1. Unités c. g. s. — Centimètre, gramme, seconde.

Force : dyne. Travail : erg; joule = 10^7 ergs.

Puissance : watt ou joule-seconde.

Unités m. t. s. — Mètre, tonne, seconde.

Force : sthène (sn) = 10^8 dynes.

Travail : kilojoule = 10^{10} ergs. Puissance : kilowatt.

2. Unités m. kg. s. — Mètre, kilogramme, seconde.

Force : kilogramme-poids = 981×10^3 dynes.

Travail : kilogrammètre = 981×10^5 ergs = 9 joules, 81.

Puissance : cheval vapeur (cv) = $75^{km} = 735^w$ 75;
 HP = 746^w ; Poncelet = $100^{km} = 981^w$.

3. Composition des forces. — 1° Cas de 2 forces concourantes P et Q , résultante R .

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2P \cdot Q \cos(P, Q),$$

$$\frac{P}{\sin(R, Q)} = \frac{Q}{\sin(R, P)} = \frac{R}{\sin(P, Q)}.$$

2° Cas de 3 forces concourantes, X, Y, Z , la résultante R est la diagonale du parallélépipède des forces.

$$\text{Si les forces sont rectangulaires, on a : } \begin{cases} X = R \cos \alpha \\ Y = R \cos \beta \\ Z = R \cos \gamma \end{cases}$$

α, β, γ , angles de R avec les forces;

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2; \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

3° Cas de plusieurs forces concourantes $P, P', P'' \dots$ résultante R , faisant avec 3 axes rectangulaires les angles $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \dots$, on a :

$$X_1 = \Sigma P \cos \alpha, Y_1 = \Sigma P \cos \beta, Z_1 = \Sigma P \cos \gamma;$$

$$R = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}, \cos \alpha = \frac{X_1}{R}, \cos \beta = \frac{Y_1}{R}, \text{ etc.}$$

4° Cas de 2 forces parallèles : P appliquée en A , Q appliquée en B , leur résultante R appliquée en un point C de AB , tel que :

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P \pm Q}{BC \pm AC} = \frac{R}{AB}, \text{ + ou -}$$

suivant que P et Q sont de même sens ou de sens contraire.

5° Cas de plusieurs forces parallèles : Le point d'application de R ou centre des forces parallèles est indépendant de la direction des forces. Soient $P, P' \dots$ les forces, R la résultante, $x, y, z, x', y', z' \dots, x_1, y_1, z_1$ les coordonnées des points d'application, on a :

$$R = \Sigma P, x_1 = \frac{\Sigma Px}{R}, y_1 = \frac{\Sigma Py}{R}, z_1 = \frac{\Sigma Pz}{R}$$

4. Centres de gravité. — 1° Contour du triangle, G est le centre du cercle inscrit dans le triangle formé par les pieds des médianes.

$$2^\circ \text{ Arc de cercle : } OG = \frac{R \times \text{corde}}{\text{arc}}.$$

3° Aire du triangle : G est au point d'intersection des médianes.

4° Aire du trapèze, x et y étant les distances de G à la grande et à la petite base, on a : $\frac{x}{y} = \frac{B + 2b}{b + 2B}.$

$$5^\circ \text{ Aire du secteur circulaire : } OG = \frac{2R}{3} \times \frac{\text{corde}}{\text{arc}}.$$

6° Pyramide, cône : G est aux $\frac{3}{4}$ de Sg joignant le sommet au centre de gravité de la base.

5. Équilibre. — 1° Corps solide soumis aux forces dont les composantes rectangulaires sont $X, Y, Z; X', Y', Z' \dots$ les coordonnées des points d'application étant $x, y, z, x', y', z' \dots$:

$$\Sigma X = 0 \quad Yz - Zy = 0$$

$$\Sigma Y = 0 \quad Zx - Xz = 0$$

$$\Sigma Z = 0 \quad Xy - Yx = 0$$

2° Solide sur le plan incliné : $\frac{P}{Q} = \frac{h}{l} = \sin \alpha$, P puissance parallèle au plan incliné, Q poids du mobile, h et l hauteur et longueur du plan, inclinaison α .

3° Levier : $Pa = Qb$, a et b bras de levier des 2 forces P et Q .

4° Treuil : $\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}$, r rayon du cylindre, R rayon de la roue ou de la manivelle.

5° Moufles : $P = \frac{Q}{n}$, n nombre des brins qui soutiennent la poulie mobile.

6° Vis : $\frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi R}$, h pas de vis, R rayon de la circonférence.

6. Mouvement. — *Mouvement rectiligne uniforme* : $e = vt$, e espace, v vitesse, t temps, $x = x_0 + vt$, x_0 abscisse au temps zéro.

Mouvement uniformément varié, γ accélération,

$$x = \frac{\gamma}{2} t^2 + v_0 t + x_0, \quad v = \frac{dx}{dt} = \gamma t + v_0,$$

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

le mouvement est accéléré ou retardé suivant que v et γ sont de même signe ou de signes contraires.

Chute des corps (dans le vide) : Corps tombant d'une hauteur h , sans vitesse initiale :

$$h = \frac{gt^2}{2}, \quad v = gt = \sqrt{2gh}.$$

Corps tombant d'une hauteur h avec une vitesse initiale v_0 :

$$h = \frac{gt^2}{2} + v_0 t, \quad v = v_0 + gt, \quad v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

Corps lancé verticalement vers le haut avec une vitesse v_0 , le corps atteint la hauteur h :

$$h = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t, \quad v = v_0 - gt, \quad v^2 = v_0^2 - 2gh.$$

Corps tombant suivant un plan d'inclinaison α (sans frotte-