Fonctions quasi-lipschitziennes

Marc Lorenzi

13 novembre 2020

Dans cet article, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins 2 points. Les deux définitions ci-dessous ne sont pas standard ....

Définition 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est *quasi-lipschitzienne* sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0, \forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x| + \varepsilon$$

En nous inspirant de la définition de la continuité uniforme, tentons un échange de quantificateurs et donnons une autre définition :

Définition 2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est *uniformément quasi-lipschitzienne* sur I lorsque

$$\exists k > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x| + \varepsilon$$

Proposition 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est quasi-lipschitzienne sur I si et seulement si elle est uniformément continue sur I.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons f quasi-lipschitzienne sur I.

Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons la définition 1 à $\frac{1}{2}\varepsilon$. Donnons-nous donc $k > 0$ tel que

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x| + \frac{1}{2}\varepsilon$$

Soit $\alpha = \frac{\varepsilon}{2k}$. Soient $x, y \in I$. Supposons que $|y - x| \leq \alpha$. On a alors

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x| \leq \alpha k + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Ainsi, f est uniformément continue sur I.

($\Leftarrow$) Supposons f uniformément continue sur I.

Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons la définition de la continuité uniforme à ε. Donnons-nous donc $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in I, |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soient $x, y \in I$. Supposons par exemple $x \leq y$. Par le théorème d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$x + n\alpha \leq y < x + (n+1)\alpha$$

Écrivons le télescopage

$$f(y) - f(x) = f(y) - f(x + n\alpha) + \sum_{k=0}^{n-1} (f(x + (k+1)\alpha) - f(x + k\alpha))$$

Passant à la valeur absolue et utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(x + n\alpha)| + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x + (k+1)\alpha) - f(x + k\alpha)|$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $|(x + (k+1)\alpha) - (x + k\alpha)| = \alpha$. On a donc

$$|f(x + (k+1)\alpha) - f(x + k\alpha)| \leq \varepsilon$$

De même, $|y - (x + n\alpha)| \leq \alpha$ et donc

$$|f(y) - f(x + n\alpha)| \leq \varepsilon$$

De là,

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon = \varepsilon + n\varepsilon$$

Remarquons maintenant que l'inégalité $n\alpha \leq y - x$ entraîne que $n \leq \frac{y-x}{\alpha}$. Ainsi,

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\alpha}(y - x) = \varepsilon + k|y - x|$$

en posant $k = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ et en remarquant que $y - x \geq 0$. Ainsi, f est quasi-lipschitzienne sur I.

Passons maintenant aux fonctions uniformément quasi-lipschitziennes.

Proposition 2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est uniformément quasi-lipschitzienne si et seulement si elle est lipschitzienne.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons f uniformément quasi-lipschitzienne. Soit $k > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x| + \varepsilon$$

Soient $x, y \in I$. On a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|f(y) - f(x)| - k|y - x| \leq \varepsilon$$

Ainsi,

$$|f(y) - f(x)| - k|y - x| \leq 0$$

ou encore

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$$

Ainsi, f est k-lipschitzienne sur I.

($\Leftarrow$) Supposons f k-lipschitzienne sur I, où $k > 0$. Soient $x, y \in I$. On a

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x| \leq k|y - x| + \varepsilon$$

Ainsi, f est uniformément quasi-lipschitzienne sur I.

En conclusion rigolote, une fonction est lipschitzienne si et seulement si elle est « uniformément uniformément continue » :-).