Les fonctions circulaires réciproques

1 Technique générale

Nous allons dans cet article construire et étudier les fonctions circulaires « réciproques » arc sinus, arc cosinus, arc tangente et arc cotangente. Les techniques utilisées pour construire ces fonctions seront toujours les mêmes : on part d'une fonction connue. Les théorèmes généraux de l'analyse prouvent que cette fonction est bijective. Sa réciproque est une nouvelle fonction, dont les théorèmes généraux de l'analyse (toujours eux) nous permettent de montrer les propriétés.

1.1 Bijectivité, continuité

Voici un premier théorème qui nous permet, à partir d'une fonction f ayant des propriétés de monotonie et de continuité, d'« inverser » f pour fabriquer une nouvelle fonction g qui a aussi ces propriétés de monotonie et de régularité. Nous décomposons ce théorème en deux parties.

Proposition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante. Soit $J = f(I)$. Alors

- Si $I = [a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, alors $J = [f(a), f(b)]$.
- Si $I = [a, b[$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$, alors $J = [f(a), f(b^-)[$.
- Si $I =]a, b]$ $(-\infty \leq a < b < +\infty)$, alors $J =]f(a^+), f(b)]$.
- Si $I =]a, b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, alors $J =]f(a^+), f(b^-)[$.

Les limites éventuelles $f(a^+)$ et $f(b^-)$ existent en vertu de la monotonie de f. On adapte évidemment ce résultat (et le suivant) lorsque f est strictement décroissante.

Proposition 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante. Soit $J = f(I)$. Alors

- f est une bijection de I sur J.
- Soit $g : J \to I$ la réciproque de f. La fonction g est une bijection continue strictement croissante.

Les deux points essentiels sont la monotonie stricte et la continuité. Comment prouver la monotonie stricte ? La plupart du temps, f est non seulement continue, mais en fait dérivable. Le signe de sa dérivée permet de trancher sur la monotonie stricte. Ce qui nous amène au second point.

1.2 Dérivabilité

Supposons donnée une fonction $f : I \to J$ continue, bijective, strictement croissante. Soit g la réciproque de f. La fonction g est-elle dérivable ? Si oui, quelle est sa dérivée ?

Proposition 3. Soit $a \in I$. Supposons f dérivable en a.

- Si $f'(a) \neq 0$, alors g est dérivable en $b = f(a)$ et
$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$
- Si $f'(a) = 0$, alors g n'est pas dérivable en $b = f(a)$. Précisément, la courbe de g admet une tangente verticale au point d'abscisse b.

On peut aller au delà de la simple dérivabilité :

Proposition 4. Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Si $f \in \mathcal{C}^k(I)$ et f' ne s'annule pas sur I, alors $g \in \mathcal{C}^k(J)$.

Munis de ces théorèmes, nous pouvons nous attaquer aux fonctions circulaires réciproques.

2 Arc sinus

2.1 Construction

Soit $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin x$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sa dérivée en tout point x est $f'(x) = \cos x$. Ainsi, $f' \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en $\pm\frac{\pi}{2}$. La fonction f est donc strictement croissante. C'est donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[f(-\frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{2})] = [-1, 1]$. Sa réciproque, qui est une bijection continue de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, est appelée la fonction *arc sinus* et elle est notée Arcsin.

2.2 Dérivabilité

La fonction f' s'annule en $\pm\frac{\pi}{2}$. La fonction Arcsin n'est donc pas dérivable en $f(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$. Plus précisément, la courbe de cette fonction admet en ± 1 une tangente verticale.

En revanche, $f' \neq 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et donc Arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'image de cet intervalle par f, qui est $]-1, 1[$. On a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin}' x &= \frac{1}{f'(\operatorname{Arcsin} x)} \\ &= \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} \end{aligned}$$

Remarquons que
$$\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{Arcsin} x)}$$
Comme $\operatorname{Arcsin} x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(\operatorname{Arcsin} x) > 0$ et donc
$$\cos(\operatorname{Arcsin} x) = +\sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{Arcsin} x)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin}' x &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\operatorname{Arcsin} x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-f(\operatorname{Arcsin} x)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Résumons tout cela.

Proposition 5. La fonction Arcsin : $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est une bijection continue strictement croissante. Elle n'est pas dérivable en ± 1. En revanche, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.3 Valeurs particulières

Remarquons que la fonction Arcsin, réciproque d'une bijection impaire, est elle aussi impaire. Voici quelques valeurs remarquables de cette fonction.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{Arcsin} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

2.4 Courbe

2.5 Arc sinus est-elle la réciproque de sinus ?

Définitivement non. Arcsin est la réciproque de la fonction f définie au début de cette section. Soyons un peu plus précis.

On a pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = f(\operatorname{Arcsin} x) = x$. Ainsi,

$$\sin \circ \operatorname{Arcsin} = \mathrm{id}_{[-1,1]}$$

La fonction Arcsin est donc un inverse *à droite* de la fonction sin. En revanche, elle ne peut pas en être aussi un inverse à gauche, puisque sin n'est pas bijective. Étudions plus précisément la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin x)$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est périodique de période 2π, et impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0, \pi]$.

- Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
$$\varphi(x) = \operatorname{Arcsin}(f(x)) = x$$
- Pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\pi - x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et donc
$$\varphi(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin(\pi - x)) = \operatorname{Arcsin}(f(\pi - x)) = \pi - x$$

Voici la courbe de la fonction φ.

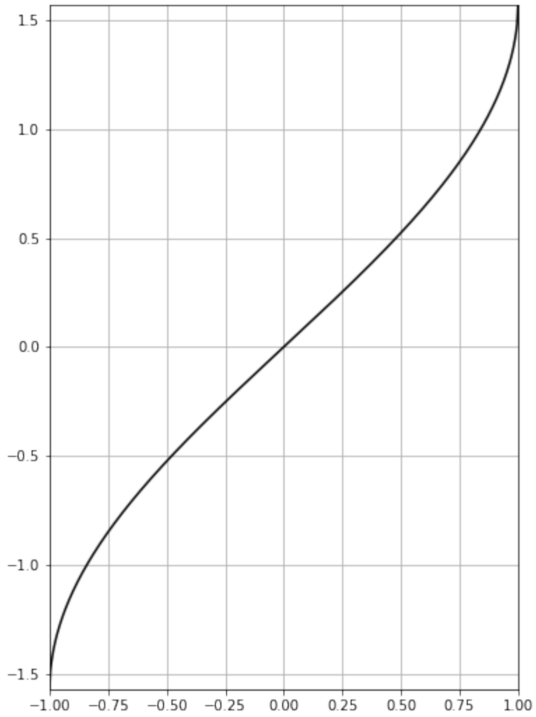

Figure 1 – Arc sinus

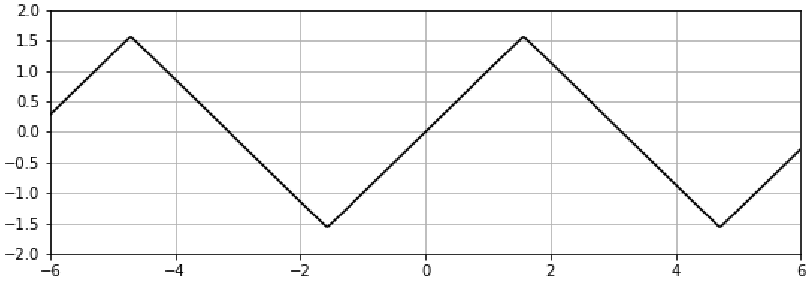

Figure 2 – $\varphi = \operatorname{Arcsin} \circ \sin$

3 Arc cosinus

3.1 Construction

Soit $g : [0, \pi] \to [-1, 1]$ définie par $g(x) = \cos x$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sa dérivée en tout point x est $g'(x) = -\sin x$. Ainsi, $g' \leq 0$ et g' ne s'annule qu'en 0 et π. La fonction g est donc strictement décroissante. C'est donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[g(\pi), g(0)] = [-1, 1]$. Sa réciproque, qui est une bijection continue strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$, est appelée la fonction *arc cosinus* et elle est notée Arccos.

3.2 Dérivabilité

La fonction g' s'annule en 0 et π. La fonction Arccos n'est donc pas dérivable en $g(0) = 1$ et $g(\pi) = -1$. Plus précisément, la courbe de cette fonction admet en 0 et π une tangente verticale.

En revanche, $g' \neq 0$ sur $]0, \pi[$, et donc Arccos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'image de cet intervalle par g, qui est $]-1, 1[$. On a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccos}' x &= \frac{1}{g'(\operatorname{Arccos} x)} \\ &= -\frac{1}{\sin(\operatorname{Arccos} x)}\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\sin(\operatorname{Arccos} x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{Arccos} x)}$$

Comme $\operatorname{Arccos} x \in]0, \pi[$, on a $\sin(\operatorname{Arccos} x) > 0$ et donc

$$\sin(\operatorname{Arccos} x) = +\sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{Arccos} x)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccos}' x &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{Arccos} x)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - g(\operatorname{Arccos} x)^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\end{aligned}$$

Résumons tout cela.

Proposition 6. La fonction Arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ est une bijection continue strictement décroissante. Elle n'est pas dérivable en ± 1. En revanche, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, et pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\operatorname{Arccos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3.3 Valeurs particulières

Voici quelques valeurs remarquables de la fonction Arccos.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{Arccos} x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

3.4 Le lien entre arc sinus et arc cosinus

Proposition 7. On a pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Soit $\varphi : x[-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x$. La fonction φ est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$, et pour tout $x \in]-1, 1[$ on a $\varphi'(x) = 0$. La fonction φ est donc constante sur $[-1, 1]$. Or, $\varphi(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. $\square$

3.5 Courbe

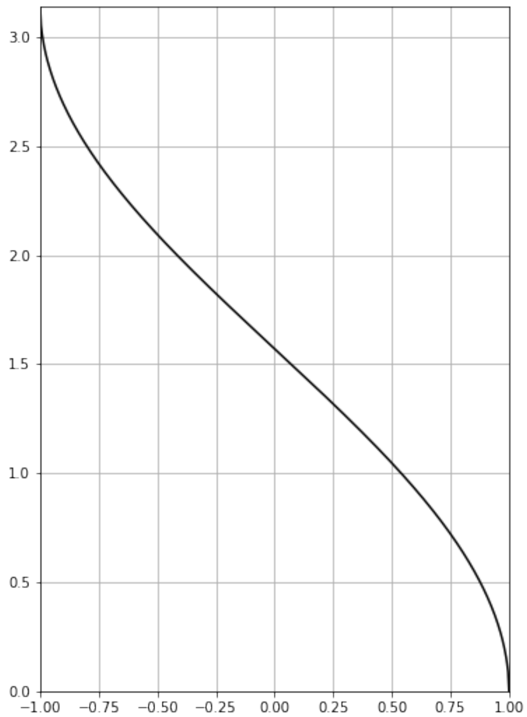

Figure 3 – Arc cosinus

3.6 Arc cosinus est-elle la réciproque de cosinus ?

Définitivement non. Arccos est la réciproque de la fonction g définie au début de cette section. Soyons un peu plus précis.

On a pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arccos}\, x) = g(\text{Arccos}\, x) = x$. Ainsi,

$$\cos \circ \text{Arccos} = \text{id}_{[-1,1]}$$

La fonction Arccos est donc un inverse *à droite* de la fonction cos. En revanche, elle ne peut pas en être aussi un inverse à gauche, puisque cos n'est pas bijective. Étudions plus précisément la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \text{Arccos}(\cos x)$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est périodique de période 2π, et paire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0, \pi]$. Or, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\psi(x) = \text{Arccos}(g(x)) = x$$

Voici la courbe de la fonction ψ.

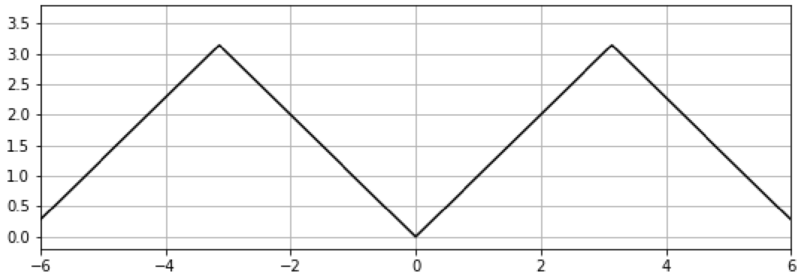

FIGURE 4 – Arccos ∘ cos

4 Arc tangente

4.1 Construction

Soit $h :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \tan x$. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sa dérivée en tout point x est $h'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$. Ainsi, $h' > 0$. La fonction h est donc strictement croissante. C'est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]\lim_{-\frac{\pi}{2}} h, \lim_{\frac{\pi}{2}} h[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Sa réciproque, qui est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, est appelée la fonction *arc tangente* et elle est notée Arctan.

4.2 Dérivabilité

La fonction h' ne s'annule pas. La fonction Arctan est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\text{Arctan}' x &= \frac{1}{h'(\text{Arctan}\, x)} \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan}\, x)} \\
&= \frac{1}{1 + h(\text{Arctan}\, x)^2} \\
&= \frac{1}{1 + x^2}
\end{aligned}$$

Résumons tout cela.

Proposition 8. La fonction $\text{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{Arctan}' x = \frac{1}{1 + x^2}$$

4.3 Valeurs particulières

Remarquons que Arctan, réciproque d'une fonction impaire, est elle aussi impaire. Voici quelques valeurs remarquables de la fonction Arctan.

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{Arctan} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

4.4 Courbe

Avant de tracer la courbe, il convient de regarder le comportement de la fonction arc tangente au voisinage de l'infini. Par imparité, il suffit de regarder en $+\infty$. Comme $\tan x \to +\infty$ lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, il en résulte que $\operatorname{Arctan} x \to \frac{\pi}{2}$ lorsque $x \to +\infty$. La courbe de la fonction Arctan admet donc la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

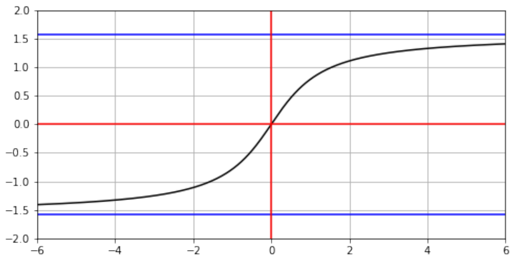

FIGURE 5 – Arc tangente

4.5 Arc tangente est-elle la réciproque de tangente ?

Définitivement non. Arctan est la réciproque de la fonction h définie au début de cette section. Soyons un peu plus précis.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\operatorname{Arctan} x) = h(\operatorname{Arctan} x) = x$. Ainsi,

$$\tan \circ \operatorname{Arctan} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

La fonction Arctan est donc un inverse *à droite* de la fonction tan. En revanche, elle ne peut pas en être aussi un inverse à gauche, puisque tan n'est pas bijective. Étudions plus précisément la fonction $\chi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie par $\chi(x) = \operatorname{Arctan}(\tan x)$, où $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble de définition de tan. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle inclus dans $\mathcal{D}$. Elle est périodique de période de période π, et impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Or, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\chi(x) = \operatorname{Arctan}(h(x)) = x$$

Voici la courbe de la fonction χ.

5 Sommes d'arcs tangentes

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Que vaut $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$? Il s'avère que la réponse dépend de certaines relations entre a et b.

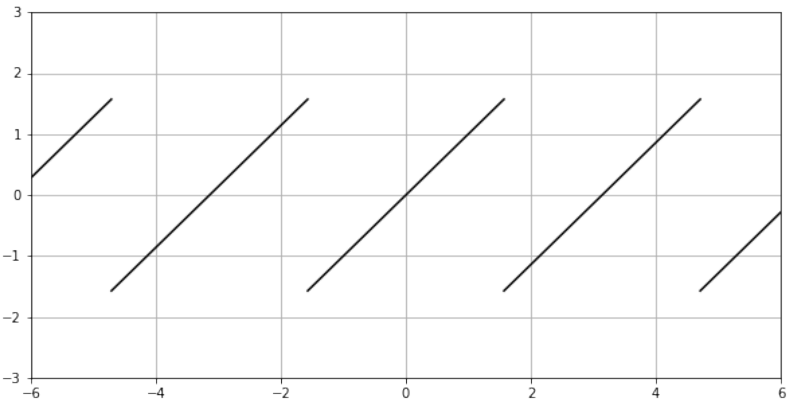

FIGURE 6 – Arctan ∘ tan

5.1 Le cas $ab = 1$

Commençons par le cas où $ab = 1$.

Proposition 9. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

- Si $a > 0$,
$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}$$
- Si $a < 0$,
$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} \frac{1}{a} = -\frac{\pi}{2}$$

Démonstration. La fonction Arctan étant impaire, il suffit de prouver le résultat pour $a > 0$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$,
$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\frac{-1}{x^2} = 0$$
La fonction φ est donc constante. Or, $\varphi(1) = 2\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{2}$. □

5.2 Le cas $ab < 1$

Regardons maintenant ce qui se passe lorsque $ab < 1$. Commençons par un lemme.

Lemme 10. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab < 1$. On a
$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b < \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Considérons trois cas.

Si $a = 0$, c'est évident.

Si $a > 0$, de $ab < 1$ on déduit $b < \frac{1}{a}$. Donc, par la croissance stricte de Arctan,
$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b < \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}$$

De plus,

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b > \operatorname{Arctan} b > -\frac{\pi}{2}$$

Si $a < 0$, de $ab < 1$ on déduit $b > \frac{1}{a}$. Donc, par la croissance stricte de Arctan,

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b > \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} \frac{1}{a} = -\frac{\pi}{2}$$

De plus,

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b < \operatorname{Arctan} b < \frac{\pi}{2}$$

□

Proposition 11. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab < 1$. On a

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab}$$

Démonstration. Posons $\alpha = \operatorname{Arctan} a$ et $\beta = \operatorname{Arctan} b$. On a

$$\frac{a+b}{1-ab} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \tan(\alpha+\beta)$$

Par le lemme ci-dessus, on a $|\alpha+\beta| < \frac{\pi}{2}$. De là,

$$\operatorname{Arctan}\tan(\alpha+\beta) = \operatorname{Arctan}(h(\alpha+\beta)) = \alpha+\beta$$

d'où le résultat cherché. □

Remarquons que si a et b sont de signes contraires, on a automatiquement $ab < 1$. Ainsi, si a et b sont deux réels positifs, comme Arctan est une fonction impaire on a

$$\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} \frac{a-b}{1+ab}$$

5.3 Le cas $ab > 1$, $a, b > 0$

Regardons maintenant le cas où $ab > 1$, $a > 0$ et $b > 0$. Le lemme ci-dessous ne nous servira pas, mais donnons-le quand même.

Lemme 12. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab > 1$, $a > 0$ et $b > 0$. On a

$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b < \pi$$

Démonstration. La deuxième inégalité est évidente car $\operatorname{Arctan} a < \frac{\pi}{2}$ et de même pour b. Pour la première inégalité, remarquons que $b > \frac{1}{a}$, et donc

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b > \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}$$

□

Proposition 13. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $ab > 1$. On a

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab} + \pi$$

Démonstration. Les réels $a' = \frac{1}{a}$ et $b' = \frac{1}{b}$ vérifient $a'b' < 1$. On a donc

$$\operatorname{Arctan} a' + \operatorname{Arctan} b' = \operatorname{Arctan} \frac{a'+b'}{1-a'b'}$$

Comme $a > 0$ et $b > 0$, on a

$$\operatorname{Arctan} a' = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} a$$

et de même pour b' et b. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\pi - \operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b &= \operatorname{Arctan} a' + \operatorname{Arctan} b' \\
&= \operatorname{Arctan} \frac{a'+b'}{1-a'b'} \\
&= \operatorname{Arctan} \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{ab}} \\
&= \operatorname{Arctan} \frac{a+b}{ab-1} \\
&= -\operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab}
\end{aligned}$$

d'où le résultat en passant à l'opposé. □

5.4 Le cas $ab > 1$, $a, b < 0$

Regardons enfin le cas où $ab > 1$, $a < 0$ et $b < 0$.

Lemme 14. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab > 1$, $a < 0$ et $b < 0$. On a

$$-\pi < \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b < -\frac{\pi}{2}$$

Proposition 15. Soient $a, b \in \mathbb{R}_-$ tels que $ab > 1$. On a

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab} - \pi$$

Démonstration. Le lemme et la proposition se montrent en remarquant que $a' = -a$ et $b' = -b$ vérifient $a'b' > 1$, $a' > 0$ et $b' > 0$. Par imparité de Arctan on obtient le résultat. □

5.5 La formule de Machin

En application de ce résultat, montrons la formule de Machin. John Machin, mathématicien anglais, utilisa cette formule pour calculer en 1706 les 100 premières décimales de π.

Proposition 16.
$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239}$$

Démonstration. Tout d'abord, appliquons la proposition à $a = b = \frac{1}{5}$. On obtient

$$2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} = \mathrm{Arctan}\,\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\frac{1}{5}} = \mathrm{Arctan}\,\frac{5}{12}$$

Réappliquons la proposition à $a = b = \frac{5}{12}$. On obtient

$$4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{5}{12} = \mathrm{Arctan}\,\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \mathrm{Arctan}\,\frac{120}{119}$$

Appliquons enfin la proposition à $a = \frac{120}{119}$ et $b = -\frac{1}{239}$. On obtient

$$\mathrm{Arctan}\,\frac{120}{119} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239} = \mathrm{Arctan}\,\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\frac{1}{239}} = \mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}$$

On vérifie évidemment à chaque étape que l'on applique la formule d'addition des arc tangentes à des nombres licites. □

6 Arc cotangente

Histoire d'être complets, disons quelques mots sur la fonction arc cotangente.

6.1 Construction

Soit $\ell :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ définie par $\ell(x) = \mathrm{cotan}\, x$. La fonction ℓ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sa dérivée en tout point x est $\ell'(x) = -1 - \mathrm{cotan}^2 x < 0$. Ainsi, $\ell' < 0$. La fonction ℓ est donc strictement décroissante. C'est une bijection de $]0,\pi[$ sur $]\lim_\pi \ell, \lim_0 \ell[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Sa réciproque, qui est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,\pi[$, est appelée la fonction *arc cotangente* et elle est notée Arccotan.

6.2 Dérivabilité

La fonction ℓ' ne s'annule pas. La fonction Arccotan est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arccotan}'\, x &= \frac{1}{\ell'(\mathrm{Arccotan}\, x)} \\
&= -\frac{1}{1+\mathrm{cotan}^2(\mathrm{Arccotan}\, x)} \\
&= -\frac{1}{1+\ell(\mathrm{Arccotan}\, x)^2} \\
&= -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Résumons tout cela.

Proposition 17. La fonction Arccotan : $\mathbb{R} \to]0, \pi[$ est une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Arccotan}'\, x = -\frac{1}{1+x^2}$$

6.3 Valeurs particulières

Voici quelques valeurs remarquables de la fonction Arccotan.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{Arccotan}\, x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

6.4 Courbe

Avant de tracer la courbe, il convient de regarder le comportement de la fonction arc cotangente au voisinage de l'infini.

Comme $\cot\mathrm{an}\, x \to +\infty$ lorsque $x \to 0$, il en résulte que $\mathrm{Arccotan}\, x \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. La courbe de la fonction Arccotan admet donc la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

Comme $\cot\mathrm{an}\, x \to -\infty$ lorsque $x \to \pi$, il en résulte que $\mathrm{Arccotan}\, x \to \pi$ lorsque $x \to -\infty$. La courbe de la fonction Arccotan admet donc la droite d'équation $y = \pi$ pour asymptote au voisinage de $-\infty$.

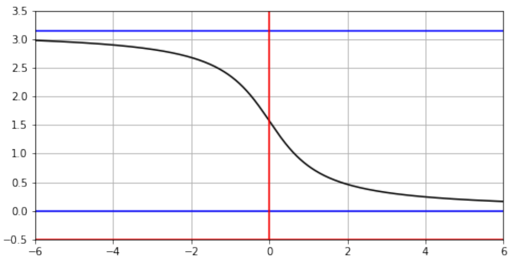

Figure 7 – Arc cotangente

6.5 Une relation entre arc tangente et arc cotangente

Proposition 18. On a pour tout réel x,

$$\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arccotan}\, x = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arccotan}\, x$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est nulle. Elle est donc constante. Or, $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$. $\square$