Séries de Riemann à paramètre réel

Marc Lorenzi

7 mai 2021

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La *série de Riemann* de paramètre α est la série

$$\mathcal{R}_\alpha = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

Nous allons dans cet article considérer uniquement le cas où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\mathcal{R}_\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. Nous allons considérer 3 cas, selon la position de α par rapport à 0 et 1.

• Si $\alpha \leq 0$, le terme général de $\mathcal{R}_\alpha$ ne tend pas vers 0. La série $\mathcal{R}_\alpha$ est donc grossièrement divergente.

Supposons dorénavant $\alpha > 0$. Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

S_n est la $n$ième somme partielle de la série $\mathcal{R}_\alpha$. On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Remarquons que pour tout entier $k \in [\![n+1, 2n]\!]$,

$$\frac{1}{(2n)^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha}$$

Ainsi, comme $S_{2n} - S_n$ est une somme de n termes,

$$\frac{n}{(2n)^\alpha} \leq S_{2n} - S_n \leq \frac{n}{n^\alpha}$$

d'où, en simplifiant,

$$\frac{1}{2^\alpha} n^{1-\alpha} \leq S_{2n} - S_n \leq n^{1-\alpha}$$

• Supposons tout d'abord $0 < \alpha \leq 1$. Comme $1 - \alpha \geq 0$, nous avons alors

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2^\alpha} n^{1-\alpha} \geq \frac{1}{2^\alpha}$$

Supposons un court instant que la série $\mathcal{R}_\alpha$ soit convergente, de somme S. Alors, S_n et S_{2n} tendent vers S lorsque n tend vers l'infini. Par passage à la limite dans les inégalités, il vient $0 \geq \frac{1}{2^\alpha}$, contradiction. Ainsi, la série diverge.

• Supposons maintenant $\alpha > 1$. Nous avons alors

$$S_{2n} - S_n \leq n^{1-\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

En particulier, pour tout entier $k \geq 1$, nous avons

$$S_{2^k} - S_{2^{k-1}} \leq \frac{1}{(2^{k-1})^{\alpha-1}} = \beta^{k-1}$$

où, comme $\alpha - 1 > 0$,

$$0 < \beta = \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$$

De là, par télescopage, on a pour tout entier $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
S_{2^n} &= S_1 + \sum_{k=1}^{n} (S_{2^k} - S_{2^{k-1}}) \\
&\leq S_1 + \sum_{k=1}^{n} \beta^{k-1} \\
&= S_1 + \frac{1-\beta^n}{1-\beta} \quad \text{(suite géométrique)} \\
&\leq S_1 + \frac{1}{1-\beta} = M
\end{aligned}$$

La série $\mathcal{R}_\alpha$ est à termes positifs, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ de ses sommes partielles est donc une suite croissante. Comme, pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité $n \leq 2^n$ (récurrence facile), il en résulte

$$S_n \leq S_{2^n} \leq M$$

La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée, donc elle converge. Ainsi, la série $\mathcal{R}_\alpha$ est convergente.

□