Le théorème de Jordan–Von Neumann

Marc Lorenzi

16 juin 2021

Résumé

On expose dans ce qui suit le cas réel d'un résultat dû à Jordan et Von Neumann. Dans tout espace préhilbertien réel E, la norme euclidienne vérifie *l'identité du parallélogramme* :

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

La réciproque est également vraie : une norme vérifiant l'identité du parallélogramme est nécessairement une norme euclidienne.

Le sens direct ne présente pas de difficulté.

Proposition 1. *Soit E un espace préhilbertien réel. On a l'identité du parallélogramme :*

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2) + \|y\|^2)$$

Démonstration. Notons $< \, , \, >$ le produit scalaire de E. Soient $x, y \in E$. On a, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \|x+y\|^2 & = & < x+y, x+y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > \\ \|x-y\|^2 & = & < x-y, x-y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x, y > \end{array} \right.$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient le résultat. $\square$ $\square$

Voici l'énoncé de la réciproque.

Proposition 2. *[Jordan, von Neumann] Soit E un espace vectoriel réel. On suppose E muni d'une norme $\| \ \|$ qui vérifie l'identité du parallélogramme. Alors la norme $\| \ \|$ est euclidienne. Plus précisément, l'application $< \, , \, >$: $E \times E \to \mathbb{R}$ définie pour tous $x, y \in E$ par*

$$< x, y >= \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$$

est un produit scalaire sur E et la norme $\| \ \|$ est la norme associée à ce produit scalaire.

Il s'agit de démontrer que $< \, , \, >$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E, et que l'on a pour tout $x \in E$, $< x, x >= \|x\|^2$. Commençons par le plus facile.

Lemme 3. *Pour tout $x \in E$, $< x, x >= \|x\|^2$.*

Démonstration.

$$< x, x >= \frac{1}{4}(\|2x\|^2 - \|0\|^2) = \|x\|^2$$

□

Corollaire 4. *Pour tout $x \in E$,*

$$\begin{cases} < x, x > \geq 0 \\ < x, x > = 0 \text{ si et seulement si } x = 0 \end{cases}$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement des propriétés d'une norme. □

Lemme 5. *Pour tous $x, y \in E$, $< x, y >=< y, x >$.*

Démonstration. C'est évident. □

Nous en arrivons à la partie la plus délicate, à savoir la linéarité en la première variable de $< \, , \, >$.

Lemme 6. *Pour tous $x, y, z \in E$, on a*

$$\|x+y+z\|^2 = \|x+y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2$$

Démonstration. On utilise de façon répétée l'identité du parallélogramme. Tout d'abord,

$$(\star) \quad 2\|x+y+z\|^2 + 2\|y-z\|^2 = \|x+2y\|^2 + \|x+2z\|^2$$

Prenons successivement $z = 0$ et $y = 0$ dans $(\star)$. On obtient

$$\begin{cases} 2\|x+y\|^2 + 2\|y\|^2 & = & \|x+2y\|^2 + \|x\|^2 \\ 2\|x+z\|^2 + 2\|z\|^2 & = & \|x\|^2 + \|x+2z\|^2 \end{cases}$$

Reportons dans $(\star)$ les valeurs de $\|x+2y\|^2$ et $\|x+2z\|^2$ que nous donnent les deux égalités ci-dessus, puis divisons par 2. On obtient

$$\|x+y+z\|^2 + \|y-z\|^2 = \|x+y\|^2 + \|y\|^2 - \|x\|^2 + \|x+z\|^2 + \|z\|^2$$

Remplaçons enfin dans cette égalité $\|y-z\|^2$ par $2\|y\|^2 + 2\|z\|^2 - \|y+z\|^2$. Il vient

$$\|x+y+z\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|z\|^2 - \|y+z\|^2 = \|x+y\|^2 + \|y\|^2 - \|x\|^2 + \|x+z\|^2 + \|z\|^2$$

d'où, enfin,

$$\|x+y+z\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2$$

$\square$

L'additivité est maintenant facile à prouver.

Lemme 7. *Pour tous $x, y, z \in E$, $< x+y, z >=< x, z > + < y, z >$.*

Démonstration. On utilise deux fois le lemme précédent avec (x, y, z) et $(x, y, -z)$.

$$\begin{array}{rcl} 4 < x+y, z > & = & \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 \\ & = & (\|x+y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2) \\ & - & (\|x+y\|^2 + \|y-z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2) \\ & = & (\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) + (\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2) \\ & = & 4 < x, z > +4 < y, z > \end{array}$$

$\square$

Assez curieusement, ce qui reste à faire est plus subtil. Il nous reste à montrer que pour tous $x, y \in E$ et tout $c \in \mathbb{R}$, on a $< cx, y >= c < x, y >$. On commence par montrer que ceci est vrai pour les rationnels.

Lemme 8. *Pour tous $x, y \in E$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, $< rx, y >= r < x, y >$.*

Démonstration. Par le lemme 7, la fonction $x \mapsto < x, y >$ est un morphisme du *groupe* $(E, +)$ vers le groupe $(\mathbb{R}, +)$. Les morphismes de groupes conservant les multiples, on a donc pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tous $x, y \in E$, $< px, y >= p < x, y >$.

Soit $r \in \mathbb{Q}$. Posons $r = \frac{p}{q}$, où $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$. On a

$$q < rx, y >=< qrx, y >=< px, y >= p < x, y >$$

En divisant par q, on en déduit

$$< rx, y >= \frac{p}{q} < x, y >= r < x, y >$$

$\square$

Notre futur produit scalaire est donc $\mathbb{Q}$-linéaire en sa première variable. Comme il est symétrique, il est donc $\mathbb{Q}$-bilinéaire. Nous allons voir que nous avons juste assez pour prouver l'inégalité de Schwarz. Elle nous servira ensuite pour montrer la $\mathbb{R}$-bilinéarité.

Lemme 9. *Pour tous $x, y \in E$, $| < x, y > | \leq \|x\| \; \|y\|$.*

Démonstration. Si $y = 0$, l'inégalité est évidente et se réduit à $0 = 0$. Prenons donc $y \neq 0$. En utilisant la symétrie et la $\mathbb{Q}$-bilinéarité, on a pour tout $r \in \mathbb{Q}$,

$$0 \leq \|x - ry\|^2 =< x - ry, x - ry >= \|x\|^2 - 2r < x, y > +r^2\|y\|^2$$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ de rationnels telle que

$$r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{< x, y >}{\|y\|^2}$$

On a pour tout entier n,

$$0 \leq \|x\|^2 - 2r_n < x, y > +r_n^2\|y\|^2$$

Un passage à la limite dans l'inégalité large ci-dessus donne

$$0 \leq \|x\|^2 - 2\frac{< x, y >^2}{\|y\|^2} + \frac{< x, y >^2}{\|y\|^4}\|y\|^2$$

ou encore, en multipliant par $\|y\|^2$,

$$0 \leq \|x\|^2\|y\|^2 - < x, y >^2$$

□

Nous pouvons maintenant étendre le résultat du lemme 5 à tous les réels.

Lemme 10. *Pour tout $c \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in E$, $< cx, y >= c < x, y >$.*

Démonstration. Soit $(r_n)_{n\geq 0}$ une suite de rationnels qui tend vers c. On a

$$\begin{array}{rcll} |< r_n x, y > - < cx, y >| & = & |< (r_n - c)x, y >| & (\mathbb{Q}\text{-bilinéarité}) \\ & \leq & \|(r_n - c)x\| \; \|y\| & (\text{Inégalité de Schwarz}) \\ & = & |r_n - c| \; \|x\| \; \|y\| & (\text{Propriétés des normes}) \end{array}$$

Faisons tendre n vers l'infini. Le majorant tend vers 0, et donc $< r_n x, y >$ tend vers $< cx, y >$. Mais par le lemme 6, $< r_n x, y >= r_n < x, y >$, et cette quantité tend vers $c < x, y >$. Par unicité de la limite, on en déduit

$$< cx, y >= c < x, y >$$

□

Il ne reste plus qu'à faire le bilan de ce qui précède.

- Par les lemmes 7 et 10, $< \, , \, >$ est linéaire en sa première variable.
- Par le lemme 5, $< \, , \, >$ est symétrique.
- Par les deux premiers points, $< \, , \, >$ est linéaire en sa deuxième variable.

- Par le corollaire 4, $< \ , \ >$ est défini positif.
- Par le lemme 3, la norme associée à $< \ , \ >$ est la norme $\| \ \|$. $\square$

Références.

- P. Jordan and J. v. Neumann ; On inner products in linear, metric spaces ; Annals of Mathematics, Vol. 36, No. 3 ; July, 1935.

- Anthony W. Knapp ; Basic Real Analysis, Exercices Chapitre XII.