Une construction de $\mathbb{C}$

Marc Lorenzi

22 septembre 2021

Proposition 1. *Il existe un corps $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- *Il existe $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.*
- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.*

Un tel corps est unique à isomorphisme près.

1 Choisir un ensemble $\mathbb{C}$

Il existe de nombreuses façons de construire le corps des nombres complexes. Nous allons choisir dans cet article la plus « élémentaire », c'est à dire celle qui fait appel au moins possible de notions. Ce n'est pas la façon la plus rapide de construire les nombres complexes, mais c'est sans doute celle qui demande le moins de prérequis.

Posons $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

2 Une structure de corps sur $\mathbb{C}$

2.1 Addition

Pour tous $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ éléments de $\mathbb{C}$, posons

$$z + z' = (x + x', y + y')$$

Proposition 2. *L'addition dans $\mathbb{C}$ vérifie les propriétés suivantes.*

- *Commutativité : pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $z + z' = z' + z$.*
- *Associativité : pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.*
- *Neutre : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z + (0, 0) = z$.*
- *Opposé : pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z + z' = (0, 0)$.*

$(\mathbb{C}, +)$ *est un* **groupe abélien**.

Démonstration.

- Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Il existe $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ tels que $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$. On a

$$\begin{aligned} z + z' &= (x, y) + (x', y') \\ &= (x + x', y + y') \\ &= (x' + x, y' + y) \\ &= (x', y') + (x, y) \\ &= z' + z \end{aligned}$$

  Ainsi, l'addition est commutative.
- Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$. Il existe $x, y, x', y', x'', y'' \in \mathbb{R}$ tels que $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ et $z'' = (x'', y'')$. On a

$$\begin{aligned} (z + z') + z'' &= ((x, y) + (x', y')) + (x'', y'') \\ &= (x + x', y + y') + (x'', y'') \\ &= ((x + x') + x'', (y + y') + y'') \\ &= (x + (x' + x''), y + (y' + y'')) \\ &= (x, y) + (x' + x'', y' + y'') \\ &= (x, y) + ((x', x'') + (y', y'')) \\ &= z + (z' + z'') \end{aligned}$$

  Ainsi, l'addition est associative.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = (x, y)$. On a

$$z + (0, 0) = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = z$$

  Ainsi, $(0, 0)$ est neutre pour l'addition dans $\mathbb{C}$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = (x, y)$. Soit $z' = (-x, -y)$. On a

$$z + z' = (x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0)$$

  Ainsi, z' est l'opposé de z pour l'addition. Dorénavant nous noterons $z' = -z$.

□

2.2 Multiplication

Pour tous $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ éléments de $\mathbb{C}$, posons

$$zz' = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

Proposition 3. *La multiplication dans $\mathbb{C}$ vérifie les propriétés suivantes.*

- *Commutativité : pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $zz' = z'z$.*

- *Associativité : pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, $(zz')z'' = z(z'z'')$.*
- *Distributivité : pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, $z(z' + z'') = zz' + zz''$.*
- *Neutre : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \times (1, 0) = z$.*

$(\mathbb{C}, +, \times)$ *est un* **anneau commutatif**.

Démonstration.

- Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Il existe $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ tels que $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$. On a

$$\begin{array}{rcl} zz' & = & (x,y)(x',y') \\ & = & (xx' - yy', xy' + x'y) \\ & = & (x'x - y'y, x'y + xy') \\ & = & (x',y')(x,y) \\ & = & z'z \end{array}$$

  Ainsi, l'addition est commutative.
- Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$. Il existe $x, y, x', y', x'', y'' \in \mathbb{R}$ tels que $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ et $z'' = (x'', y'')$. On a

$$\begin{array}{rcl} (zz')z'' & = & ((x,y)(x',y'))(x'',y'') \\ & = & (xx' - yy', xy' + x'y)(x'', y'') \\ & = & (xx'x'' - yy'x'' - xy'y'' - x'yy'', \\ & & xx'y'' - yy'y'' + xy'x'' + x'yx'') \end{array}$$

  En développant $z(z'z'')$ on trouve la même valeur. Donc,

$$(zz')z'' = z(z'z'')$$

  Ainsi, la multiplication est associative.
- Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$. Il existe $x, y, x', y', x'', y'' \in \mathbb{R}$ tels que $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ et $z'' = (x'', y'')$. On a

$$\begin{array}{rcl} z(z' + z'') & = & (x,y)(x' + y', x'' + y'') \\ & = & (xx' + xy' - yx'' - yy'', xx'' + xy'' + yx' + yy') \end{array}$$

  En développant $zz' + zz''$ on trouve la même valeur. Donc,

$$z(z' + z'') = zz' + zz''$$

  Ainsi, la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = (x, y)$. On a

$$z(1,0) = (x,y)(1,0) = (x,y) = z$$

  Ainsi, $(1, 0)$ est neutre pour la multiplication.

□

Proposition 4. *Notons $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ il existe $z' \in \mathbb{C}^*$ tel que $zz' = (1,0)$.*

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est ainsi un anneau commutatif dans lequel tout élément non nul est inversible. C'est un **corps**.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = (x, y)$. Comme $z \neq (0,0)$ on a $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, de sorte que $x^2 + y^2 \neq 0$. Posons

$$z' = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

On a

$$\begin{aligned} zz' &= (x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy+xy}{x^2+y^2}\right) \\ &= (1,0) \end{aligned}$$

□

3 L'écriture standard des nombres complexes

3.1 $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout réel x par $\varphi(x) = (x, 0)$.

Proposition 5.

- *φ est injective.*
- *Pour tous réels x, y, $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.*
- *Pour tous réels x, y, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.*
- *$\varphi(1) = (1, 0)$.*

Démonstration.

- Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons que $\varphi(x) = \varphi(y)$. On a donc $(x, 0) = (y, 0)$, d'où $x = y$.
- Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi(x+y) = (x+y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

- Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi(xy) = (xy, 0) = (x, 0)(y, 0) = \varphi(x)\varphi(y)$$

- Le dernier point est évident.

$\square$

Ce résultat montre que $\widehat{\mathbb{R}} = \varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ isomorphe à $\mathbb{R}$. En d'autre termes, $\widehat{\mathbb{R}}$ est un corps qui possède exactement les mêmes propriétés que $\mathbb{R}$. Nous n'avons donc pas vraiment $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, à moins que …

Qui est $\mathbb{R}$? Eh bien c'est un corps qui vérifie certaines propriétés. Mais lequel ? Il existe beaucoup de corps vérifiant les propriétés de $\mathbb{R}$! Nous prenons ici une décision stratégique. Nous décidons d'oublier notre « ancien » $\mathbb{R}$ et d'appeler $\mathbb{R}$ le « nouveau » $\mathbb{R}$, c'est à dire $\widehat{\mathbb{R}}$. Dit autrement, nous identifions le couple $(x, 0)$ au réel x.

3.2 Le nombre i

Proposition 6. *Il existe deux nombres complexes z tels que $z^2 = -1$.*

Démonstration. Rappelons-nous notre identification : $-1 = (-1, 0)$. Soit $i = (0, 1)$. On a

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Il existe donc au moins un nombre complexe i tel que $i^2 = -1$. Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = -1$. On a donc $z^2 - i^2 = 0$ d'où

$$(z - i)(z + i) = 0$$

Supposons $z \neq i$. Alors $z - i$ est inversible pour la multiplication. En multipliant l'égalité ci-dessus par l'inverse de $z - i$ on obtient $z + i = 0$ d'où $z = -i$.

Les nombres complexes dont le carré est -1 sont donc $-i$ et i. $\square$

Définition 1. $i = (0, 1)$.

3.3 L'écriture définitive

Proposition 7. *Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a (rappelons-nous nos identifications)

$$\begin{aligned} x + iy &= (x, 0) + (0, 1)(y, 0) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout nombre complexe z et tous réels x, y, on a $z = x + iy$ si et seulement si $z = (x, y)$, d'où l'existence et l'unicité.

$\square$

3.4 Bilan

Nous avons démontré le résultat suivant.

Proposition 8. *Il existe un corps $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- *Il existe* $i \in \mathbb{C}$ *tel que* $i^2 = -1$.
- *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *il existe un unique couple* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $z = x + iy$.

Il nous reste à montrer « l'unicité » d'un tel corps.

4 Unicité de $\mathbb{C}$

Proposition 9. *Soit* $\mathbb{C}'$ *un corps vérifiant les propriétés suivantes :*

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}'$.
- *Il existe* $i' \in \mathbb{C}'$ *tel que* $i'^2 = -1$.
- *Pour tout* $z \in \mathbb{C}'$ *il existe un unique couple* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $z = x + i'y$.

Alors il existe un unique isomorphisme de corps $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}'$ *tel que* $\psi(i) = i'$ *et pour tout réel* x, $\psi(x) = x$.

Démonstration. Soit $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ définie comme suit. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ de la forme $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\psi(z) = x + i'y$$

On vérifie alors facilement les propriétés suivantes :

- ψ est bijective.
- Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\psi(z + z') = \psi(z) + \psi(z')$.
- Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\psi(zz') = \psi(z)\psi(z')$.
- $\psi(1) = 1$.

L'application ψ est un *isomorphisme* du corps $\mathbb{C}$ sur le corps $\mathbb{C}'$. De plus, $\psi(i) = i'$ et pour tout réel x,

$$\psi(x) = \psi(x + 0i) = x + 0i' = x$$

Pour terminer montrons l'unicité d'un tel isomorphisme. Soit $\xi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}'$ un isomorphisme de corps tel que $\xi(i) = i'$ et pour tout réel x, $\xi(x) = x$. On a alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \xi(x + iy) &= \xi(x) + \xi(i)\xi(y) \\ &= x + i'y \\ &= \psi(x + iy) \end{aligned}$$

Ainsi, $\xi = \psi$.

□