La fonction de Thomae

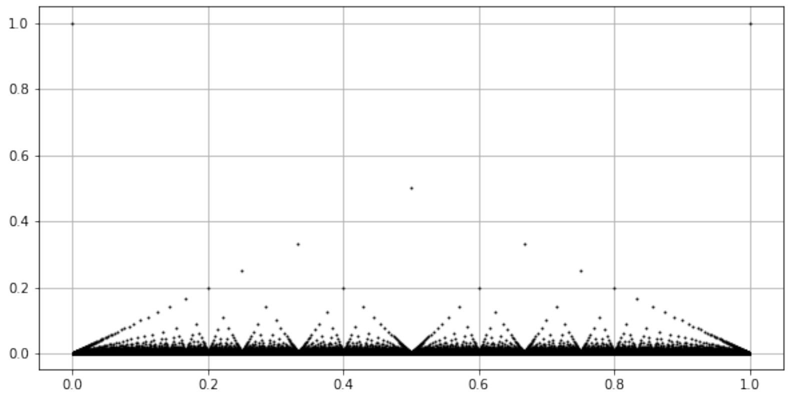
Marc Lorenzi

30 novembre 2021

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x comme suit.

- Si x est irrationnel, $f(x) = 0$.
- Sinon, x s'écrit de façon unique $x = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, et on pose $f(x) = \frac{1}{q}$.

La fonction f est périodique, de période 1. Voici la courbe de f sur l'intervalle $[0, 1]$.



Dorénavant, quand nous dirons « le rationnel $\frac{p}{q}$ », nous supposerons implicitement que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, et $p \wedge q = 1$.

1. Disontinuité en les rationnels

Proposition 1. *f est discontinue en tout rationnel.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Par la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'irrationnels qui tend vers x. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$. Ainsi, $f(x_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc $f(x_n)$ ne tend pas vers $f(x)$. Par le théorème de caractérisation séquentielle des limites, f n'est pas continue en x. $\square$

2. Continuité en les irrationnels

Proposition 2. *f est continue en tout irrationnel.*

Démonstration. Soit x un irrationnel. Soit $\varepsilon > 0$. Soit un entier $Q \geq 1$ tel que $0 < \frac{1}{Q} \leq \varepsilon$. Considérons l'ensemble

$$A = \left\{ r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \leq Q, |r - x| \leq 1 \right\}$$

L'ensemble A est un ensemble fini. En effet, pour chaque entier $1 \leq q \leq Q$, $\frac{p}{q} \in A$ si et seulement si

$$x - 1 \leq \frac{p}{q} \leq x + 1$$

ou encore

$$-q(x-1) \leq p \leq q(x+1)$$

et il y a un nombre fini d'entiers naturels p vérifiant cette double inégalité. Écrivons donc

$$A = \{r_1, \ldots, r_N\}$$

où N est le cardinal de A.

Soit

$$\delta = \frac{1}{2} \min(1, |x - r_1|, \ldots, |x - r_N|)$$

Remarquons que, comme x est irrationnel, aucun des r_i n'est égal à x et donc $\delta > 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y - x| \leq \delta$.

- Si y est irrationnel, alors $|f(y) - f(x)| = |0 - 0| = 0 \leq \varepsilon$.
- Sinon, posons $y = \frac{p}{q}$. y n'est pas l'un des r_i, donc $y \notin A$. Cependant, $|y - x| \leq 1$, donc $q > Q$. En conséquence,

$$|f(y) - f(x)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{Q} \leq \varepsilon$$

□