

$$x^x$$

Marc Lorenzi

5 décembre 2021

1 La fonction $x \mapsto x^x$

La fonction $f : x \mapsto x^x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant pour tout $x > 0$,

$$x^x = e^{x \ln x}$$

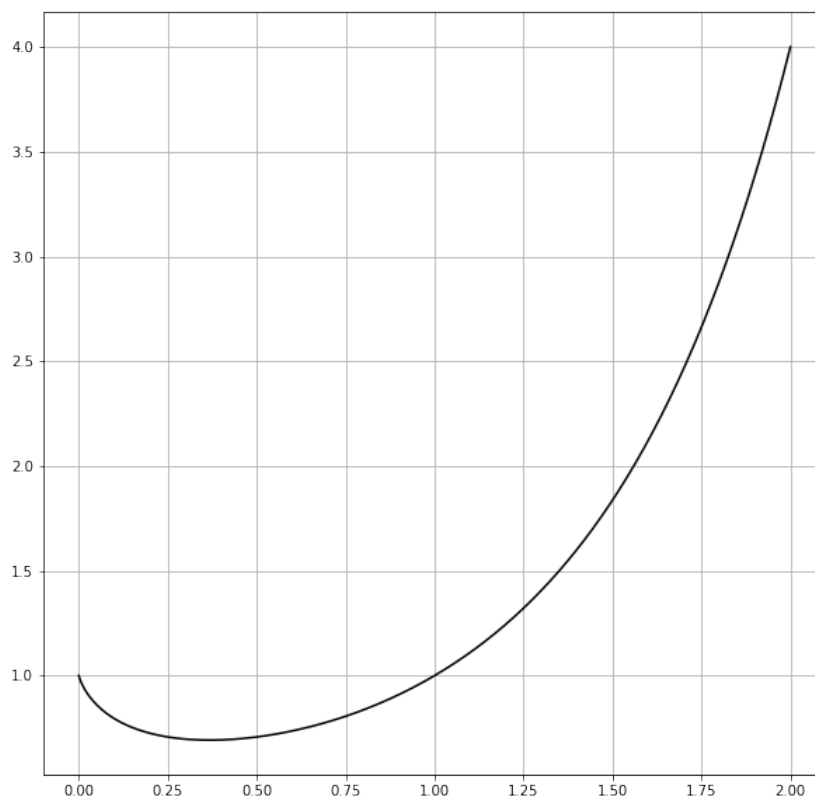
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = (1 + \ln x)x^x$$

On prolonge f sans problème par continuité à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$. Le prolongement n'est pas dérivable en 0 car

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} \sim \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$$

La fonction f décroît sur $[0, \frac{1}{e}]$, passe par un minimum, puis croît sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$. La courbe de f a une *branche parabolique* dans la direction de l'axe Oy .



Peut-on prolonger f à $\mathbb{R}$ tout entier de façon « naturelle » ?

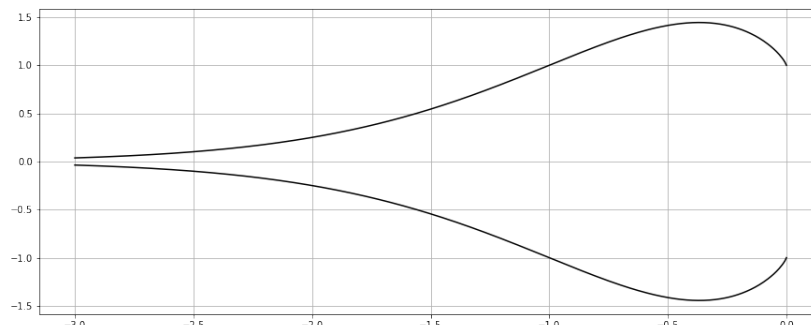
2 Les rationnels

Notons E l'ensemble des rationnels négatifs dont le dénominateur est impair.

Soit $x = \frac{p}{q} \in E$ écrit sous forme irréductible. Comme q est impair, la fonction « racine q ième » est définie sur $\mathbb{R}$ et donc x^x est bien défini. Posons $r = -p$. On a alors

$$x^x = \left(-\frac{r}{q}\right)^{-\frac{r}{q}} = (-1)^r \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{r}{q}} = \frac{(-1)^r}{|x|^{|x|}}$$

Remarquons que l'ensemble E est dense dans $\mathbb{R}_-$. Mieux, l'ensemble E^+ des éléments de E dont le numérateur est pair est dense dans $\mathbb{R}_-$, et de même pour l'ensemble E^- des éléments de E dont le numérateur est impair. En traçant le graphe de $x \mapsto \pm \frac{1}{|x|^{|x|}}$ nous aurons donc une excellente vue de l'image de E par f .



3 Les réels négatifs

3.1 Le logarithme complexe

Peut-on définir x^x pour *tout* réel négatif ? Nous allons ici explorer une possibilité, mais nous n'aurons pas unicité de la définition.

Pour tout z complexe non nul et tout $k \in \mathbb{Z}$, posons

$$\log_k z = \ln |z| + i \arg z + 2ik\pi$$

où $\arg z \in]-\pi, \pi]$. On a

$$\begin{aligned} \exp(\log_k z) &= \exp(\ln |z|) \exp(i \arg z) \exp(2ik\pi) \\ &= |z| \exp(i \arg z) \\ &= z \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $\log_k$ est un inverse à droite de la fonction exponentielle.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\arg x = 0$ et donc

$$\log_k x = \ln x + 2ik\pi$$

Prenons maintenant $x \in \mathbb{R}_-^*$. On a $\arg x = \pi$ et donc

$$\log_k x = \ln(-x) + (2k+1)i\pi$$

3.2 Retour sur f

Posons pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_k(x) = \exp(x \log_k x)$$

On a pour tout $x < 0$,

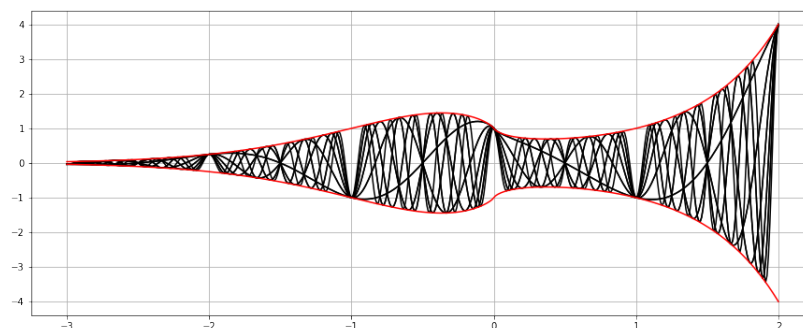
$$\begin{aligned} f_k(x) &= \exp(x \ln(-x)) \exp((2k+1)i\pi x) \\ &= (-x)^x \exp((2k+1)i\pi x) \\ &= \frac{1}{|x|^{|x|}} \exp((2k+1)i\pi x) \end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$,

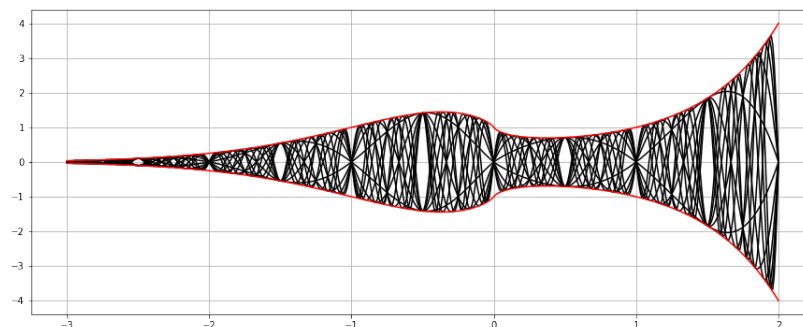
$$\begin{aligned} f_k(x) &= \exp(x \ln x) \exp(2ik\pi x) \\ &= x^x \exp(2ik\pi x) \end{aligned}$$

Remarquons en particulier que si $k = 0$ on retrouve pour $x > 0$ la fonction « usuelle » $x \mapsto x^x$.

Voici le graphe de la partie réelle des fonctions f_k . En rouge, sur $\mathbb{R}_-$, les valeurs que nous avons obtenues pour les rationnels dans la section 1. Et sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $x \mapsto \pm x^x$.



Le tracé des parties imaginaires donne un graphe tout à fait semblable.



On peut également tracer les courbes des fonctions f_k , à valeurs complexes. Ces courbes peuvent être vues comme des courbes dans l'espace (pour chaque réel x , $f_k(x)$ est un nombre complexe, déterminé par deux réels). Les voici avec, en rouge, la courbe de f_0 .

