$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Marc Lorenzi

26 novembre 2021

Résumé

Nous allons montrer qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$. La preuve présentée ici repose uniquement le fait que toute suite de réels croissante et majorée est convergente.

Lemme 1. Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de segments non vides de $\mathbb{R}$, décroissante pour l'inclusion. L'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est non vide.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n = \min I_n$. Par la décroissance de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Comme $I_n \subseteq I_0$, $a_n \in I_0$ et ainsi, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $\max I_0$. Cette suite est donc convergente. Notons ℓ sa limite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \geq n$, on a $a_m \in I_m \subseteq I_n$. Comme I_n est fermé, un passage à la limite lorsque m tend vers $+\infty$ montre que $\ell \in I_n$. $\square$

L'intersection des I_n est en fait un segment non vide, mais nous n'en aurons pas besoin dans la suite.

Lemme 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Il existe $x \in I$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \neq a_n$.

Démonstration. On définit par récurrence une suite décroissante $(I_n)_{n \geq 0}$ de segments contenant au moins deux points telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \notin I_n$. Soit I_0 un segment contenant au moins deux points inclus dans I tel que $a_0 \notin I_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, supposant construit I_n , on coupe I_n en trois segments de même longueur.

- Si a_{n+1} n'est pas dans le segment de gauche, on appelle I_{n+1} le segment de gauche.
- Sinon, si a_{n+1} n'est pas dans le segment du milieu, on appelle I_{n+1} le segment du milieu.
- Sinon, a_{n+1} appartient aux deux premiers segments : c'est le point qui est au premier tiers du segment I_n , et donc a_n n'est pas dans le segment de droite. On appelle alors I_{n+1} le segment de droite.

Le segment I_{n+1} contient au moins deux points, ne contient pas a_{n+1} , et il est inclus dans I_n . Soit $J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. L'ensemble J est une intersection décroissante

de segments non vides, c'est donc un ensemble non vide. Soit $x \in J$. Comme $x \in I_0$, $x \in I$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in I_n$, donc $x \neq a_n$. $\square$

Proposition 3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. Il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur I .*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = f(n)$. On applique la proposition précédente pour obtenir un réel x différent de tous les a_n . La fonction f n'est donc pas surjective. $\square$

Il n'existe a fortiori pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur I , et donc I n'est pas dénombrable. En prenant $I = \mathbb{R}$ on obtient le résultat annoncé dans le titre de l'article.